Appunti sulle coniche

Marco Bramanti

Febbraio 2004

Sommario

Nello studio della geometria elementare, l'unica linea curva che solitamente si incontra è la circonferenza; le *coniche*, di cui qui ci occuperemo, sono, dopo la circonferenza, le curve piane più semplici, e le prime che storicamente sono state studiate: intorno al 225 a.C., Apollonio di Perga scrisse un famoso trattato sulle coniche; Cartesio, nella sua *Geometria* (1637), ne diede la prima trattazione coi metodi della *geometria analitica*. Inoltre, le coniche fanno naturalmente la loro comparsa in moltissime applicazioni (geometriche, meccaniche…).

Le coniche possono essere studiate da tre punti di vista diversi: quello della geometria elementare dello spazio, quello della geometria elementare del piano, e quello della geometria analitica piana. Discuteremo brevemente i primi due punti di vista nel §1, per poi concentrarci sul punto di vista della geometria analitica, che affronteremo nel §2 in modo molto elementare, e in una forma un po' astratta (e generale) nel § 3, utilizzando anche i primi strumenti dell'algebra lineare.

Presenteremo quindi brevemente (§4) alcuni esempi di questioni geometriche e fisiche in cui fanno naturalmente la loro comparsa le coniche. Quest'ultima discussione conduce inevitabilmente (§5) a citare anche le *superfici quadriche* che costituiscono, nello spazio tridimensionale, una sorta di analogo delle curve coniche nel piano.

1. Le coniche dal punto di vista della geometria elementare

Prima definizione (dal punto di vista della geometria elementare dello spazio): le coniche come sezioni di un cono. Consideriamo anzitutto un *cono a due falde* (fig. 1), ovvero la superficie, nello spazio, così definita: si considera una retta a, detta *asse del cono* (che pensiamo verticale), e un punto V su a, detto *vertice del cono*; su un piano orizzontale, si considera una circonferenza avente il centro su a; il cono a due falde è la superficie formata da tutte le rette (dette *generatrici* del cono) che passano per V e per un punto qualsiasi della circonferenza.

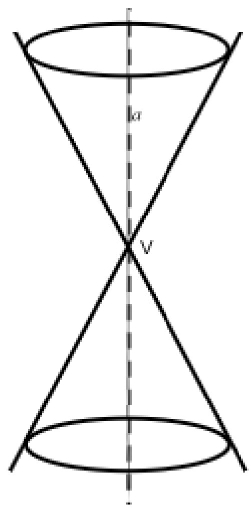


fig.1

Si dice *sezione conica* (o semplicemente *conica*) qualsiasi curva si ottenga intersecando il cono a due falde con un piano qualsiasi dello spazio, *non passante* [1] *per il vertice* V. A

[1] In tutta la nostra trattazione delle coniche, siamo interessati essenzialmente alle coniche cosiddette "non degeneri", ossia quelle che dal punto di vista geometrico sono delle curve effettive (non ridotte a rette o singoli

seconda della posizione che il piano ha rispetto al cono a due falde, la conica può essere una curva di tipo diverso (v. fig.2):

Caso 1. Se il piano è meno inclinato delle generatrici (rispetto all'orizzontale), allora interseca una sola delle due falde del cono, e taglia su di esse una curva (limitata) detta *ellisse (non degenere)*. Se il piano è orizzontale, l'ellisse è una *circonferenza.* Le circonferenze, quindi, sono particolari ellissi.

Caso 2. Se il piano è parallelo a una generatrice, interseca una sola delle due falde del cono, e taglia su di esse una curva (illimitata) detta *parabola (non degenere).*

Caso 3. Se il piano è più inclinato delle generatrici (rispetto all'orizzontale), interseca entrambe le falde del cono, e taglia su di esse una curva (illimitata e spezzata in due rami) detta *iperbole (non degenere).*

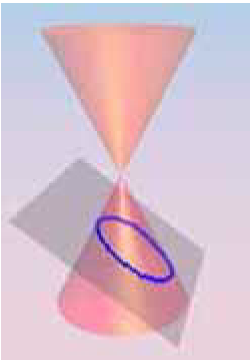
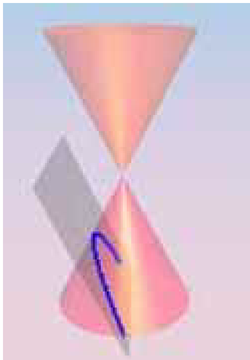
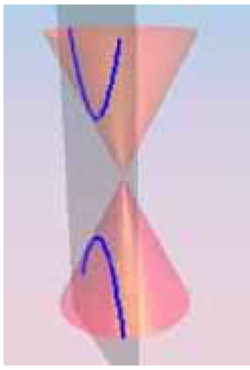
Il piano è meno inclinato delle generatrici	Il piano è parallelo alle generatrici	Il piano è più inclinato delle generatrici
		
ellisse	parabola	iperbole

fig. 2

Seconda definizione (dal punto di vista della geometria elementare piana): le coniche come luoghi geometrici. Senza fare uso di costruzioni tridimensionali, le coniche possono anche essere definite direttamente come opportuni *luoghi geometrici*[2], nel piano, al seguente modo.

Ellisse. Siano F_1, F_2 due punti nel piano, eventualmente coincidenti, e d un numero reale maggiore della distanza $\overline{F_1F_2}$. Si chiama *ellisse di fuochi* F_1, F_2 l'insieme dei punti P del piano tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = d$, ossia tali che la somma delle loro distanze dai 2 fuochi è

punti). Per questo motivo escludiamo il caso in cui il piano passa per il vertice del cono. Il lettore provi a ragionare su cosa si ottiene intersecando il cono con un piano passante per V.

[2] Ricordiamo che un *luogo geometrico* è una figura definita come l'insieme dei punti che soddisfano una certa proprietà caratteristica.

costante. (v. fig.1)

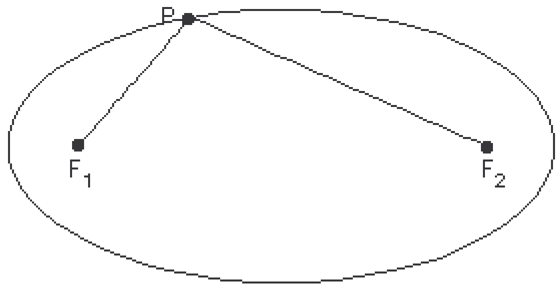


fig.3

Caso particolare: se $F_1 \equiv F_2$, l'ellisse è la circonferenza di raggio d e centro F_1.

Questa definizione suggerisce anche un modo empirico per tracciare un'ellisse: si fissa uno spago sottile di lunghezza d a due chiodini F_1, F_2; con una matita si tende lo spago (la punta della matita è in P); ora si fa scorrere la matita tutt'attorno ai due fuochi, tenendo sempre teso il filo: la curva tracciata è un'ellisse.

Parabola. Sia F un punto del piano (detto *fuoco* della parabola) e r una retta, non passante per F (detta *direttrice* della parabola). Si dice parabola di fuoco F e direttrice r il luogo dei punti equidistanti da F e r. In altre parole: per ogni punto P della parabola, detta H la sua proiezione su r, risulta $\overline{PH} = \overline{PF}$. (v. fig.4).

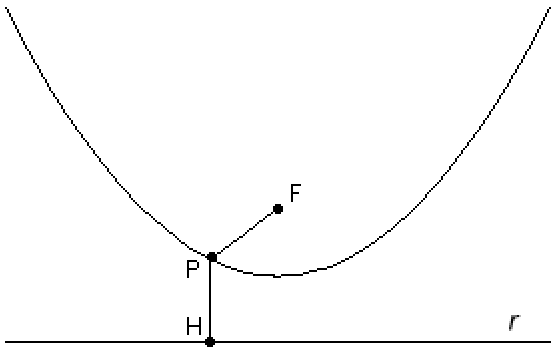


Fig. 4

Iperbole. Siano F_1, F_2 due punti nel piano, e d un numero reale positivo minore della distanza $\overline{F_1F_2}$. Si chiama *iperbole di fuochi* F_1, F_2 il luogo dei punti P del piano tali che $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = d$, ossia tali che il modulo della differenza delle loro distanze dai 2 fuochi sia costante. (v. fig.5). La relazione precedente equivale a $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm d$; ciascuna delle due equazioni (con il segno $+$ oppure $-$ davanti a d) individua uno dei due *rami* dell'iperbole.

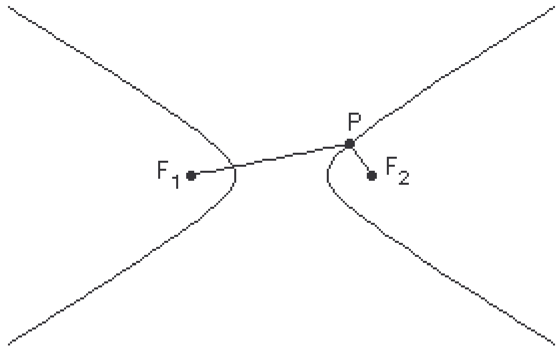


Fig.5

Si può dimostrare che *una curva è un'ellisse (rispettivamente: una parabola, un'iperbole) rispetto alla prima definizione (sezione di un cono) se e solo se lo è rispetto alla seconda definizione (luogo geometrico definito mediante opportune distanze).*

Le due definizioni date sono dunque equivalenti, anche se a prima vista molto diverse.

Il seguente teorema, che non dimostriamo, fornisce una caratterizzazione ancora diversa di ellisse, parabola e iperbole come luoghi geometrici, che è forse meno intuitiva della prima, ma ha il pregio di trattare i tre tipi di coniche in modo più uniforme:

Teorema 1. *Consideriamo, nel piano, un punto, detto* fuoco*, ed una retta, detta* direttrice*. Il luogo dei punti P per cui il cui rapporto tra la distanza di P dal fuoco e la distanza di P dalla direttrice è costante è una conica; questa costante si dice* eccentricità (e) *della conica. Precisamente, la conica risulta essere*

un'iperbole se $e > 1$

una parabola se $e = 1$

un'ellisse se $0 \leq e < 1$

ed in particolare una circonferenza se $e = 0$ *(caso limite).*

Come lo studente vedrà quando studierà più in generale le curve nel piano, questo teorema è alla base della rappresentazione delle coniche come *curve in forma polare*, rappresentazione molto utile, ad esempio, nella descrizione dei moti dei pianeti.

2. Le coniche dal punto di vista della geometria analitica. Equazione canonica delle coniche

Dopo aver dato varie definizione delle coniche dal punto di vista della geometria elementare (sintetica) è ora naturale chiederci come si rappresentino analiticamente, ossia: dato un sistema di riferimento cartesiano (x, y), come si scrivono le equazioni delle coniche?

La definizione di ellisse, parabola, iperbole come luogo geometrico (seconda definizione del §1) si presta facilmente ad essere tradotta in un calcolo analitico:

Ellisse. Consideriamo un'ellisse di fuochi F_1, F_2. In un opportuno sistema di riferimento cartesiano, sarà $F_1 \equiv (0, a)$; $F_2 \equiv (0, -a)$, per un certo $a > 0$. Se $P \equiv (x, y)$, la relazione $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = d$ (con $2a < d$) si scrive:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x+a)^2+y^2}=d.$$

Elevando tutto al quadrato si trova

$$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2+2\sqrt{\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x+a)^2+y^2\right)}=d^2$$

$$2x^2+2y^2+2a^2+2\sqrt{(x^2+y^2+a^2-2ax)(x^2+y^2+a^2-2ax)}=d^2$$

$$\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2}=\frac{d^2}{2}-\left(x^2+y^2+a^2\right)$$

ed elevando ancora al quadrato:

$$\left(x^2+y^2+a^2\right)^2-4a^2x^2=\frac{d^4}{4}-d^2\left(x^2+y^2+a^2\right)+\left(x^2+y^2+a^2\right)^2$$

$$x^2\left(d^2-4a^2\right)+d^2y^2=d^2\left(\frac{d^2}{4}-a^2\right).$$

Ricordiamo ora che per ipotesi $d>2a$, quindi $\frac{d^2}{4}-a^2>0$, poniamo $\frac{d^2}{4}-a^2=c^2$. Si ha allora

$$4c^2x^2+d^2y^2=d^2c^2$$

che, dividendo per d^2c^2 si riscrive:

$$\frac{x^2}{(d/2)^2}+\frac{y^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Iperbole. Consideriamo ora un'iperbole di fuochi $F_1\equiv(0,a)$; $F_2\equiv(0,-a)$, per un certo $a>0$. Se $P\equiv(x,y)$, la relazione $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=d$ (con $2a>d$) si scrive:

$$\left|\sqrt{(x-a)^2+y^2}-\sqrt{(x+a)^2+y^2}\right|=d.$$

Elevando tutto al quadrato e semplificando come nel caso precedente si trova

$$\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2}=\left(x^2+y^2+a^2\right)-\frac{d^2}{2}$$

ed elevando ancora al quadrato e semplificando:

$$x^2\left(d^2-4a^2\right)+d^2y^2=d^2\left(\frac{d^2}{4}-a^2\right).$$

Ricordiamo ora che per ipotesi $d<2a$, quindi $\frac{d^2}{4}-a^2<0$, poniamo $a^2-\frac{d^2}{4}=c^2$. Si ha allora

$$-4c^2x^2+d^2y^2=-d^2c^2$$

che, dividendo per $-d^2c^2$ si riscrive:

$$\frac{x^2}{(d/2)^2}-\frac{y^2}{c^2}=1. \tag{2}$$

Parabola. Consideriamo ora una parabola di fuoco $F\equiv(a,0)$ e direttrice la retta: $x=-a$. Se $P\equiv(x,y)$, uguagliando le distanze di P dal fuoco e dalla direttrice si ha:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=|x+a|.$$

Elevando tutto al quadrato e semplificando si trova

$$y^2 = 4ax. \tag{3}$$

I calcoli precedenti mostrano come si scrive l'equazione di un'ellisse, una parabola o un'iperbole, in un sistema di riferimento scelto in maniera tale da rendere *abbastanza semplice* l'equazione della conica. Questa forma semplice dell'equazione viene detta *forma canonica*, ed è quella che si presta a studiare per via analitica le proprietà delle coniche e disegnarle, determinandone le caratteristiche salienti. E' quello che ora faremo, brevemente, per i 3 tipi di conica.

Ellisse e circonferenza in forma canonica

Si dice *ellisse* (non degenere, reale) *in forma canonica* la curva di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a, b > 0. \tag{4}$$

(cfr. con (1). Equivalentemente, si dice che la (4) è l'*equazione canonica dell'ellisse*. I numeri a, b sono detti *semiassi* dell'ellisse.

Se in particolare $a = b = R$, si ha l'equazione della *circonferenza di centro l'origine e raggio R*:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{5}$$

Infatti, quest'ultima equazione descrive il luogo dei punti $P(x, y)$ per cui la distanza dall'origine è pari ad R.

Per disegnare la curva (1) sono utili le seguenti osservazioni:

1. Dall'equazione si vede che la curva è simmetrica rispetto a ciascuno dei due assi (scambiando x con $-x$ o y con $-y$ l'equazione non cambia), e simmetrica rispetto all'origine (scambiando (x, y) in $(-x, -y)$ l'equazione non cambia.

2. La curva interseca gli assi nei 4 punti $(\pm a, 0), (0, \pm b)$, detti *vertici dell'ellisse.* I semiassi rappresentano quindi le distanze del centro di simmetria dai vertici.

3. Se si pone

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{b}{a} y' \end{cases} \tag{6}$$

l'equazione diventa

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

che è l'equazione di una circonferenza. Poiché la trasformazione (6) corrisponde a una *dilatazione lungo l'asse y*, ciò significa che l'ellisse si ottiene dalla circonferenza centrata nell'origine e raggio a eseguendo una dilatazione nella direzione dell'asse y. Perciò l'ellisse ha la forma familiare di una "circonferenza allungata in una direzione" (fig. 6):

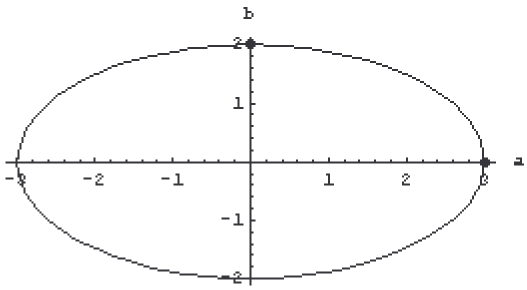


fig.6

Confrontando l'equazione (4) con i calcoli che hanno portato alla (1) si vede che i *fuochi dell'ellisse* stanno sempre sull'asse *maggiore*, e le loro coordinate si possono esprimere in funzione dei semiassi:

Sintesi sull'ellisse in forma canonica. Equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a, b > 0.$$

Semiassi: a, b.
Vertici: $(\pm a, 0), (0, \pm b)$.
Fuochi: se $a > b$: $\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$; se $b > a$: $\left(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2}\right)$.
Se $a = b$ è la circonferenza di raggio $R = a = b$ e centro l'origine.

Iperbole in forma canonica
L'*equazione canonica dell'iperbole* (non degenere) è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a, b > 0 \tag{7.a}$$

(cfr. (2)) oppure

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{con } a, b > 0. \tag{7.b}$$

Se in particolare $a = b$, l'iperbole si dice *equilatera*. Per disegnare la curva sono utili le seguenti osservazioni:

1. Come per l'ellisse, anche per l'iperbole si vede dall'equazione che la curva è simmetrica rispetto a ciascuno dei due assi e rispetto all'origine.
2. La curva (7.a) interseca gli assi nei 2 punti $(\pm a, 0)$, detti *vertici dell'iperbole.* (La curva (7.b) interseca gli assi nei 2 vertici $(0, \pm b)$).
3. Delimitiamo ora le regioni del piano in cui giace il grafico dell'iperbole. Consideriamo l'espressione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

L'equazione $f(x, y) = 0$ individua le due rette, passanti per l'origine, di equazione

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Queste 2 rette dividono il piano in 4 regioni (fig.7); in due di queste (quelle che contengono l'asse x) è $f(x, y) > 0$, nelle altre due (che contengono l'asse y) è $f(x, y) < 0$. Sui punti dell'iperbole (7.a) è $f(x, y) = 1$, perciò *l'iperbole* (7.a) *si trova 2 nelle regioni in cui f è positiva*.

Inoltre, poiché $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2}$, sui punti dell'iperbole è $x^2 \geq a^2$, dunque:

l'*iperbole sta solo nelle regioni in cui $x \geq a, x \leq -a$.*

4. Nella regione $x \geq a$, per esempio, dalla (7.a) si può ricavare la y in funzione di x: si trovano due funzioni,

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},\ y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\,.$$

Queste due funzioni possono essere facilmente studiate con i primi strumenti del calcolo infinitesimale.

5. Tenendo conto di tutte queste informazioni, si vede che l'iperbole ha due rami distinti, e il suo grafico qualitativo è:

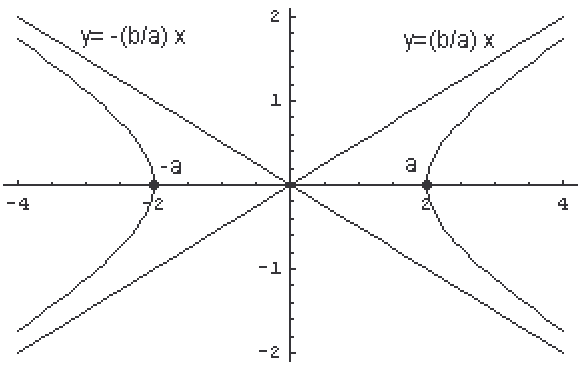


fig.7

Le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$, dette *asintoti*, non fanno parte dell'iperbole ma aiutano a disegnarla, in quanto la curva si avvicina sempre più a tali rette, mano a mano che il punto sulla cura si allontana dai vertici.

Notare che se l'iperbole è equilatera $(a = b)$ gli asintoti sono le rette $y = \pm x$, ortogonali tra loro.

Per la (7b) valgono le stesse considerazioni, tranne che ora l'iperbole è compresa nelle altre due regioni formate dagli asintoti (quelle che contengono l'asse y):

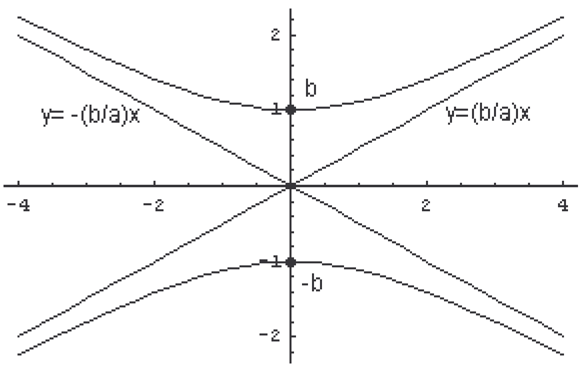


fig.8

Sintesi sull'iperbole in forma canonica

	Caso (7.a)	Caso (7.b)
Equazione:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
Asintoti:	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{b}{a} x$
Vertici:	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
Fuochi:	$\left(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$	$\left(0, \pm\sqrt{a^2+b^2}\right)$

Se $a = b$ l'iperbole si dice *equilatera* e gli asintoti sono le bisettrici degli assi coordinati.

Parabola in forma canonica

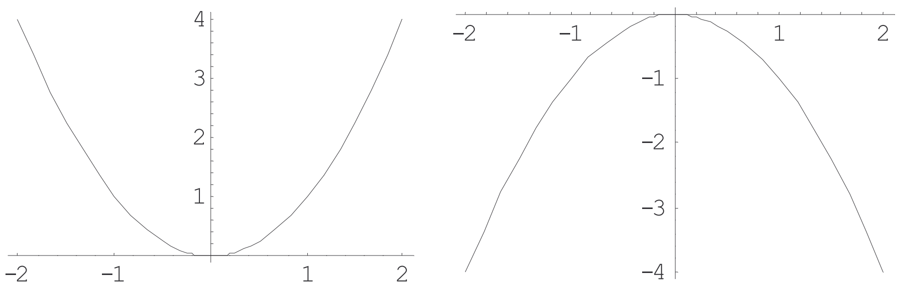
L'*equazione canonica della parabola* (non degenere) è:

$$y = ax^2 \tag{8.a}$$

oppure

$$x = by^2 \tag{8.b}$$

Ragioniamo sulla (7.8.a). La curva è simmetrica rispetto all'asse y (se (x, y) sta sul grafico, anche $(-x, y)$ vi sta); perciò l'asse y è detto *asse della parabola*; se $a > 0$ ($a < 0$) sta tutta nel semipiano $y \geq 0$ ($y \leq 0$, rispettivamente); l'origine è il *vertice* della parabola, e il grafico è del tipo:



$y = ax^2, a > 0$ fig.9 $y = ax^2, a < 0$

Sintesi sulla parabola in forma canonica

	Caso (8.a)	Caso (8.b)
Equazione:	$y = ax^2$	$x = by^2$
Asse:	$x = 0$	$y = 0$
Vertice:	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Fuoco:	$\left(0, \frac{1}{4a}\right)$	$\left(\frac{1}{4b}, 0\right)$
Direttrice:	$y = -\frac{1}{4a}$	$x = -\frac{1}{4b}$

3. L'equazione generale delle coniche. Riduzione a forma canonica

Le coniche come curve algebriche del second'ordine
La forma canonica delle coniche è quella che l'equazione assume in un sistema di riferimento *opportuno*. Chiediamoci ora: se cambiamo sistema di riferimento, ossia eseguiamo una *rototraslazione d'assi*, come cambia l'equazione della conica?

Cominciamo col ricordare che una rotazione d'assi di angolo α attorno all'origine ha come effetto il passaggio dalle coordinate (x, y) alle nuove coordinate (x', y') legate alle precedenti dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

Più in generale, una rototraslazione di assi[3] si rappresenterà come trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases} \tag{10}$$

Se ora sostituiamo le (10) nell'equazione canonica di un'ellisse, iperbole o parabola (v. (4), (7), (8)), otterremo in generale un'equazione di secondo grado in x, y completa di tutti i termini, ossia del tipo:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{11}$$

Questo significa che, in un sistema di riferimento *generico* (ossia: non scelto con criteri particolari) l'equazione di una conica assume la forma (11). Dal punto di vista della geometria analitica, risulta allora naturale la seguente

Definizione 2. Chiameremo *conica* qualsiasi curva che in un sistema cartesiano (x, y) si rappresenti con un'equazione algebrica di secondo grado in x, y, ossia di tipo (8), dove a, b, c (i coefficienti dei termini di secondo grado) non sono tutti nulli.

Per i discorsi fatti fin qui, è chiaro che ogni conica nel senso della geometria elementare (§1) è anche una conica rispetto a questa definizione. Il viceversa non è però vero. Come mostrano i prossimi esempi, infatti, equazioni di tipo (11) possono rappresentare anche coniche "patologiche":

Esempio 1. Consideriamo le seguenti equazioni, tutte di tipo (11):

a. $$x^2 - y^2 = 0$$

b. $$x^2 = 0$$

c. $$x^2 + y^2 = 0$$

d. $$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

[3] Ricordiamo che, nel piano, le rototraslazioni rappresentano i più generali movimenti rigidi; eseguire una rototralsazione di assi equivale quindi a cambiare il sistema di riferimento (cartesiano ortogonale), senza cambiare unità di misura sugli assi.

L'equazione a è equivalente a $(x+y)(x-y)=0$, perciò rappresenta le due rette $y=x, y=-x$; la *b* rapresenta una sola retta: $x=0$; la *c* individua un solo punto, l'origine; infine, l'equazione *d* non è mai verificata, perciò individua l'insieme vuoto.

Occorrono dunque dei criteri per decidere, data un'equazione di tipo (11), anzitutto se essa rappresenti una "vera" conica (vedremo che si dirà: *conica reale non degenere*) o no, e in secondo luogo di che tipo di conica si tratti. Ad esempio, se si tratta di un'ellisse, vogliamo trovare una rototraslazione d'assi che la riporti a forma canonica, in modo da saperla tracciare.

Viene in aiuto, in questo, il calcolo matriciale. Consideriamo ancora l'equazione (11), riscritta ora, per comodità, al modo seguente:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{12}$$

Introdotta la matrice $(3,3)$ simmetrica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{13}$$

l'equazione si riscrive in forma matriciale, così:

$$(x,y,1)\boldsymbol{A}(x,y,1)^T = 0.$$

Poniamo anche

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Le matrici $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ si dicono *matrice dei coefficienti della conica* e *matrice dei termini di secondo grado della conica*, rispettivamente. Supponiamo ora di eseguire una rototraslazione d'assi, di tipo (10); la nuova equazione, nelle variabili (x', y'), può essere riscritta nella forma (11), con nuovi coefficienti a'_{ij}, che raccogliamo in una nuova matrice $\boldsymbol{A}'$. Si dimostra che, anche se $\boldsymbol{A}'$ in generale può avere tutti gli elementi diversi dai corrispondenti elementi di $\boldsymbol{A}$, alcune quantità calcolate su questa matrice rimangono invariate (si dicono perciò invarianti):

Teorema 3. (Invarianti della matrice di una conica). *A seguito di una rototraslazione di assi, le seguenti quantità rimangono invariate:*

$$I_3 = DetA \text{ (detto "invariante cubico");}$$

$$I_2 = DetB \text{ (detto "invariante quadratico");}$$

$$I_1 = TrB \text{ (detto "invariante lineare").}$$

La dimostrazione si potrebbe fare per verifica diretta (anche se con calcoli un po' laboriosi), e la omettiamo. Vedremo, alla fine di questo paragrafo, un modo più rapido per dimostrare parte di questo teorema.

Notiamo che se moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione (12) della conica per una costante λ, e quindi tutti i ocefficienti a_{ij} risultano moltiplicati per λ, le quantità I_1, I_2, I_3 si trasformano rispettivamente in $\lambda I_1, \lambda^2 I_2, \lambda^3 I_3$, da cui il nome di invariante *lineare, quadratico, cubico*, che si dà rispettivamente a I_1, I_2, I_3.

Esempio 2. Calcoliamo gli invarianti I_2, I_3 per l'ellisse, la parabola e l'iperbole in forma canonica (v. §2).

Ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}A=-\frac{1}{a^2b^2};\mathrm{Det}B=\frac{1}{a^2b^2}.$$

Parabola:

$$y=ax^2;\ A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Det}A=-a;\mathrm{Det}B=0.$$

Iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1;\ A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & \mp 1\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Det}A=\pm\frac{1}{a^2b^2};\mathrm{Det}B=-\frac{1}{a^2b^2}.$$

Notiamo che in tutti e tre i casi risulta $\mathrm{Det}A\neq 0$; inoltre si ha

$$\mathrm{Det}B\begin{cases} >0 & \text{per l'ellisse}\\ =0 & \text{per la parabola}\\ <0 & \text{per l'iperbole.}\end{cases}$$

Possiamo dare ora la seguente

Definizione 4. Consideriamo una conica nella forma generale (12), e siano $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ le matrici (13), (14), rispettivamente. La conica si dice *degenere* se $\mathrm{Det}A=0$, *non degenere* altrimenti. La conica si dice

$$\begin{cases}\text{ellisse}\\ \text{parabola}\\ \text{iperbole}\end{cases}\ \text{se Det}B\begin{cases}>0\\ =0\\ <0.\end{cases}$$

Esempi. Classifichiamo le seguenti coniche.

3. $x^2+xy+2y^2=1$.
$\mathrm{Det}B=\frac{7}{4}>0$, quindi è un'ellisse; $\mathrm{Det}A=-\frac{7}{4}\neq 0$, quindi non è degenere.

4. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x = 0$
Det$B = 0$, quindi è una parabola. Det$A = -4 \neq 0$, perciò non è degenere.

Riduzione a forma canonica
La definizione 4 di ellisse, parabola, iperbole, è coerente con quanto già sappiamo per le coniche in forma canonica (v. §2). Inoltre, come ora vedremo, *ogni* ellisse, parabola o iperbole non degenere (rispetto alla definizione 4) si può ridurre a forma canonica con un'opportuna rototraslazione d'assi:

Teorema 5.
a. (Riduzione a forma canonica delle coniche non degeneri). Supponiamo che Det$A \neq 0$. Allora esiste una rototraslazione d'assi mediante la quale:
se Det$B < 0$, l'iperbole assume la forma canonica (7.a) o (7.b);
se Det$B = 0$, la parabola assume la forma canonica (8.a) o (8.b);
se Det$B > 0$ e Det$A < 0$, l'ellisse assume la forma canonica (4) (ellisse reale);
se Det$B > 0$ e Det$A > 0$, l'ellisse assume la forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(ellisse immaginario), che nel piano rappresenta l'insieme vuoto.
b. (Tipi di coniche degeneri). Se Det$A = 0$, la conica si riduce a: due rette, oppure una retta, oppure un punto.

Dimostrazione. La dimostrazione del punto *a* è interessante perché mostra come sia possibile in pratica individuare una rototraslazione di assi che riporta la conica a forma canonica; questo significa individuare un sistema di assi di simmetria per la conica, che permette di tracciarne il grafico. Il procedimento è in due passi: prima si cerca un'opportuna rotazione mediante la quale il termine in xy scompare; poi si cerca una traslazione che riduce la conica a forma canonica, annullando altri coefficienti. Non proveremo, invece, il punto *b*.

1. Partiamo dunque dall'equazione (12), e cominciamo ad eseguire una rotazione d'assi di tipo (9). Si ottiene

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 +$$

$$+ 2a_{13}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2a_{23}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_{33} = 0.$$

Ci interessa cercare un angolo α per cui il termine $2x'y'$ abbia coefficiente nullo. Tale coefficiente è:

$$a'_{12} = (a_{22} - a_{11})\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha = 0 \text{ per } \cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Ora, se $a_{12} = 0$, il termine in xy aveva già coefficiente nullo, e non eseguiamo alcuna rotazione; altrimenti, con una rotazione di angolo

$$\alpha = \frac{1}{2}\text{arccot}\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

il termine in $x'y'$ si annulla.

2. Partiamo ora dall'equazione priva del termine in xy, che per semplicità riscriviamo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{15}$$

(ossia chiamando ancora x, y le variabili e a_{ij} i coefficienti). Usiamo ora la *tecnica di completamento dei quadrati* per eliminare oportunamente i termini di primo grado. Occorre distinguere i casi:

2a. La conica è un'ellisse o un'iperbole. Allora $a_{11}a_{22} \neq 0$ e la (15) si può riscrivere così:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + a_{33} = 0.$$

Perciò la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ y' = y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

porta la conica nella forma

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c = 0$$

che, a sua volta, può essere immediatamente posta nella forma canonica di ellisse (reale o immaginario) o iperbole, rispettivamente.

2b. La conica è una parabola, ossia $\text{Det}B = 0$; allora $a_{11} = 0$ oppure $a_{22} = 0$; supponiamo ad esempio $a_{22} = 0$ e $a_{11} \neq 0$ (allora anche $a_{23} \neq 0$, altrimenti $\text{Det}A = 0$ e la conica è degenere). La (15) si può riscrivere così:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 = -2a_{23}\left(y - \frac{a_{13}^2}{2a_{23}a_{11}} - \frac{a_{33}}{2a_{23}}\right).$$

Perciò la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ y' = y - \frac{a_{13}^2}{2a_{23}a_{11}} - \frac{a_{33}}{2a_{23}} \end{cases}$$

porta allora l'equazione nella forma

$$y' = ax'^2. \qquad \square$$

Dalla seconda parte della dimostrazione si vede in particolare che, dovendo studiare una conica data in forma generale, se nell'equazione il termine in xy è già assente, con la tecnica del completamento dei quadrati si individua facilmente una *traslazione* che riporta la conica a forma canonica. Vediamo come questo procedimento è utile, in pratica, per disegnare la conica:

Esempi

5. La conica di equazione

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 3y + 1 = 0$$

è un'ellisse. Con la tecnica di completamento dei quadrati, scriviamo

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

$$2y^2 + 3y = 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

e quindi l'equazione diventa

$$(x-2)^2 - 4 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 1 = 0$$

ossia

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{33}{8}} + \frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{33}{16}} = 1.$$

Perciò si tratta dell'ellisse di centro $\left(2, -\frac{3}{4}\right)$ e semiassi $\sqrt{\frac{33}{8}}, \frac{\sqrt{33}}{4}$:

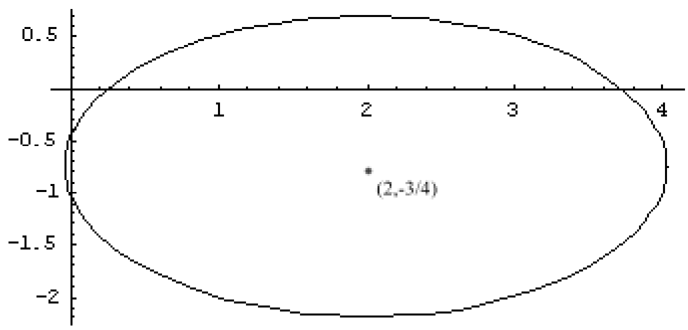


fig.10

6. Data una qualsiasi circonferenza, di equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{16}$$

con la tecnica di completamento dei quadrati si può sempre riscriverla nella forma:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - c.$$

Questa rappresenta la circonferenza di centro $(-a/2, -b/2)$ e raggio $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - c}$, purché naturalmente risulti $\frac{a^2+b^2}{2} - c > 0$. In caso contrario, la circonferenza è immaginaria, e rappresenta nel piano $\mathbb{R}^2$ l'insieme vuoto. Viceversa, l'equazione della circonferenza di centro

(x_0, y_0) e raggio R si scrive

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

7. La conica di equazione

$$x^2 - 2y^2 + x + 1 = 0$$

è un'iperbole, che si può riscrivere nella forma:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2y^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{8}} = -1$$

perciò ha gli assi di simmetria $x = -\frac{1}{2}, y = 0$, i vertici $\left(-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$, asintoti dati da:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2y^2 = 0,\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Grafico:

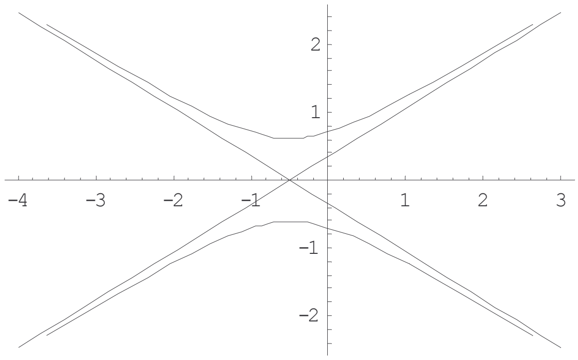


fig.11

8. Parabola in forma funzionale. Ogni conica di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

è una parabola, come si verifica dal calcolo di Det$B$; la tecnica di completamento dei quadrati permette di riconoscerne:

Asse: $$y = -\frac{b}{2a}$$

Vertice: $$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

e quindi disegnarla. Ricordare che se $a > 0$ la parabola è illimitata verso l'alto, se $a < 0$ verso il basso. (Nel caso $x = ay^2 + by + c$ è sufficiente scambiare le coordinate x, y).

Significato algebrico della riduzione a forma canonica. Diagonalizzazione

Abbiamo visto che, se nell'equazione di una conica compare il termine in xy, esiste una rotazione d'assi in seguito alla quale questo termine scompare. Questa operazione geometrica ha un notevole significato algebrico, legato alla *diagonalizzazione delle matrici* (v. §6.3), che può essere utile tener presente.

Sappiamo che la matrice $\boldsymbol{B}$ dei coefficienti dei termini di secondo grado è *reale e simmetrica*, quindi diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale; d'altro canto abbiamo visto che una matrice ortogonale 2×2 rappresenta appunto una rotazione nel piano. Si può scrivere dunque:

$$R^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

con

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

per opportuni $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. La matrice R rappresenta una rotazione d'assi di angolo α. Ponendo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

l'equazione della conica

$$(x, y, 1)\boldsymbol{A}(x, y, 1)^T = 0$$

si riscrive:

$$(\, x' \quad y' \quad 1\,)\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}(\, x' \quad y' \quad 1\,)^T = 0$$

(si noti che $\boldsymbol{S}$ è una matrice ortogonale 3×3). In particolare, la parte contenente i termini di secondo grado è

$$(x'\, y')\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(x'\, y')^T$$

e poiché $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, nelle nuove variabili x', y' l'equazione della conica ha la forma:

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

ossia abbiamo eliminato il termine in $x'y'$, come desiderato.

Per la determinazione effettiva della matrice $\boldsymbol{R}$, è utile ricordare che le sue colonne sono autovettori (normalizzati) di λ_1, λ_2.

Esempio 9. Ricondurre a forma canonica la conica:

$$2xy + x + 1 = 0.$$

Si tratta di un'iperbole, non degenere. Posto

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cerchiamo anzitutto autovalori e autovettori di B. Un facile calcolo dà:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

con autovettori relativi (ad esempio):

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1);\ \boldsymbol{v}_2 = (1,-1).$$

Si noti che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ sono ortogonali, ma non hanno modulo unitario. Normalizzandoli, cioè calcolando $\boldsymbol{v}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\boldsymbol{v}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, otteniamo la matrice di rotazione richiesta:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(si riconosce che è una rotazione di $\frac{\pi}{4}$). Eseguendo dunque la rotazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

l'equazione della conica diventa:

$$x'^2 - y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0.$$

Il completamento dei quadrati ci suggerisce ora la traslazione corretta da eseguire:

$$\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8} - \left(y' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{8} + 1 = 0.$$

Ponendo quindi:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y'' = y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

l'equazione dell'iperbole si può riscrivere in forma canonica:

$$x''^2 - y''^2 = -1.$$ □

Notiamo infine che il ragionamento fatto sulla diagonalizzazione di $\boldsymbol{B}$ dimostra alcune delle affermazioni fatte riguardo agli *invarianti* di una conica. Infatti: a seguito di una *rotazione* d'assi, la nuova matrice dei coefficienti, $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ è equivalente ad $\boldsymbol{A}$ e perciò ha lo stesso determinante, $I_3 = \mathrm{Det}\boldsymbol{A}$. Inoltre la nuova matrice dei coefficienti dei termini di 2° grado è $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$, equivalente a $\boldsymbol{B}$; perciò la rotazione d'assi non altera Det$\boldsymbol{B}$ e Tr$\boldsymbol{B}$, ossia gli invarianti I_2, I_1. D'altro canto una *traslazione* non altera i coefficienti dei termini di secondo grado; quindi I_1, I_2 sono effettivamente invarianti per rototraslazioni. Per completare la dimostrazione del teorema sugli invarianti, occorrerebbe ancora dimostrare che una traslazione non altera Det$\boldsymbol{A}$.

Esercizi

Riconoscere e disegnare le seguenti coniche:

1. $x^2 + 3y^2 = 4$
2. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
3. $2x^2 - 3y^2 + 5 = 0$
4. $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$
5. $x^2 + 2y^2 - 4x + 3y + 6 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 3x - y + 2 = 0$
7. $2x^2 + y^2 - 3 = 0$
8. $x^2 - 3y^2 = 0$
9. $3x^2 - y^2 + 1 = 0$
10. $x^2 - 4y - 3x = 0$
11. $x^2 + 2y^2 + 4x + 4 = 0$
12. $x^2 + 3y^2 - 2x - 3 = 0$
13. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
14. $y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$
15. $2x^2 + 2y^2 + x + 3 = 0$
16. $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$
17. $7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$

18. Scrivere l'equazione dell'ellisse di centro $(1, -1)$, assi paralleli agli assi coordinati, semiassi $(2, 3)$.

19. Scrivere l'equazione dell'ellisse di fuochi $(0, 2), (0, -2)$ e passante per il punto $(1, 3)$.

20. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(2, -3)$ e raggio 5.

21. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(1, 2)$ passante per il punto $(3, 1)$.

22. Scrivere l'equazione dell'iperbole avente centro $(0, 0)$, asintoti di coefficienti angolari $\pm\frac{1}{2}$, un vertice in $(2, 0)$.

23. Scrivere l'equazione dell'iperbole avente centro $(2, 1)$, asintoti di coefficienti angolari ± 2, un vertice in $(2, 2)$.

24. Scrivere l'equazione della parabola di vertice $(1, 2)$, asse parallelo all'asse y, e passante per il punto $(3, 4)$.

25. Scrivere l'equazione della parabola di vertice $(1, -1)$, asse parallelo all'asse x, e passante per l'origine.

26. Dimostrare il Teorema 1. (Suggerimento: scegliere un riferimento in cui il fuoco è l'origine e la direttrice è la retta $x = d$; scrivere analiticamente la definizione di conica data nel Teorema 1, mediante l'eccentricità e; sviluppare i calcoli e riconoscere il tipo di conica di cui si tratta, al variare di e).

27. Ragionando geometricamente, riconoscere che le curve che si ottengono sezionando un cono a due falde con un piano passante per il vertice sono esattamente le coniche degeneri descritte dal Teorema 5.b.

28. Dimostrare che se una conica si riduce a due rette, oppure una retta, oppure un punto, allora $\mathrm{Det}A = 0$. (Suggerimento: in ciascuna delle tre ipotesi, scegliere un sistema di riferimento opportuno, in cui la conica si scrive in modo molto semplice; scrivere quindi la matrice A e verificare che $\mathrm{Det}A = 0$).

29. Dimostrare che se una conica ha $\mathrm{Det}A = 0$, allora si riduce a due rette, oppure una retta, oppure un punto. (Suggerimento: ripercorrere la dimostrazione del Teorema 5.a: prima

si elimina il termine in xy con una rotazione; poi si distingue il caso ellisse o iperbole degenere dal caso parabola degenere e si esegue un'opportuna traslazione; quindi si ipone la condizione $\mathrm{Det}A = 0$ e si osserva cosa accade dell'equazione...).

4. Esempi di applicazioni delle coniche

Terminiamo questa breve trattazione segnalando brevemente alcune questioni più o meno elementari in cui sono coinvolte le coniche.

1. L'ombra proiettata da una circonferenza su un piano è un'ellisse.
2. La sezione di un cilindro con un piano (non parallelo all'asse del cilindro) è un'ellisse.
3. L'orbita di un pianeta intorno al sole è un'ellisse, di cui il sole occupa uno dei fuochi. Questa è la famosa "prima legge di Keplero" sul moto dei pianeti, formulata nel 1609.
4. Più in generale, applicando le leggi della meccanica, Newton dimostrò che un qualsiasi corpo celeste sia attratto dal sole, si muove lungo un'orbita descritta da una conica, quindi non necessariamente un'ellisse. Si noti, però, che tra ellisse, parabola e iperbole, l'ellisse è l'unica curva *chiusa*. Perciò se il corpo celeste (cometa, asteroide...) passa vicino al sole lungo un'orbita parabolica o iperbolica, significa che ci passa una volta sola e poi si allontana per sempre. Nel 1705 Sir Edmond Halley (1656-1742) mostrò che la cometa che oggi porta il suo nome si muove intorno al sole su un'orbita ellittica, ritornando ogni 76 anni nella stessa posizione. Fu la prima verifica sperimentale di questo fatto, per un corpo celeste diverso da un pianeta del nostro sistema solare.
5. In base alle leggi della cinematica classica, il moto di un proiettile (nel vuoto) avviene lungo una parabola. Per "proiettile" si intende qualsiasi corpo il cui moto sia dato dalla composizione di un'accelerazione costante in verticale (accelerazione di gravità) e una velocità costante in una qualsiasi direzione diversa dalla verticale. Ad esempio, uno zampillo d'acqua che esce (con velocità costante) da una fontanella in qualsiasi direzione *non* verticale, descrive in prima approssimazione una parabola.
6. La terra ha, in prima approssimazione, la forma di un ellissoide, un solido tale che ogni sua sezione con un piano passante per il centro è un'ellisse.
7. La parabola ha la proprietà che ogni raggio che giunge sul suo interno parallelamente all'asse, viene riflesso nel fuoco (fig.12). Su questo principio si basano molti dispositivi, tra cui:

a. L'*antenna parabolica*. Questa antenna ha la forma della superficie generata dalla rotazione di una parabola intorno al suo asse ("paraboloide di rotazione"); perciò tutti i raggi (onde elettromagnetiche) che arrivano parallelamente al suo asse vengono riflesse in un unico punto, il fuoco, in cui è posto il ricevitore. Le onde captate dall'antenna parabolica si possono supporre viaggiare su linee parallele in quanto provengono da una sorgente molto lontana. Dunque la forma dell'antenna parabolica è quella adatta a convogliare in un unico punto le onde elettromagnetiche provenienti da molto lontano.

b. Per lo stesso motivo, i telescopi sono dotati di *specchi parabolici*, costruiti in modo da convogliare in un punto (in cui si trova l'osservatore) i raggi luminosi provenienti da molto lontano.

c. Nel *microfono parabolico*, infine, le onde sonore provenienti dall'infinito vengono a concentrarsi nel fuoco del paraboloide nel cui fuoco si trova un microfono. Le cuffie collegate al microfono permettono di sentire queste onde sonore. Questo oggetto è comunemente utilizzato dagli ornitologi e permette di sentire il canto degli uccelli ad un chilometro di distanza.

d. Reciprocamente, i *fari delle automobili* hanno la forma di un paraboloide affinché la luce *emessa* nel fuoco venga riflessa e inviata in raggi luminosi paralleli.

8. Supponiamo di avere uno specchio di forma ellittica. Se si pone una sorgente di luce in uno dei due fuochi, tutti i raggi riflessi passeranno per l'altro fuoco (da cui l'origine del nome "fuoco") (fig.13). Analogamente, supponiamo di essere in una sala di forma ellittica (oppure sormontata da una volta ellittica). Il suono emesso in uno dei due fuochi, anche se molto debole, si sente molto bene nell'altro fuoco.

La proprietà dei punti dell'ellisse, di avere somma delle distanze dai fuochi costante, significa che le onde luminose o sonore che sono emesse in un fuoco e, riflesse dalla parete, raggiungono l'altro fuoco, percorrono tutte la stessa distanza e perciò arrivano contemporaneamente (in fase).

9. La forma assunta dalla superficie libera del liquido contenuto in un cilindro che ruota attorno al proprio asse è un parabolide di rotazione, ossia: la sezione di questa superficie con un piano verticale passante per l'asse del cilindro è una parabola.

10. Quando una grandezza y dipende da un'altra grandezza x in modo *inversamente proporzionale*, significa che $y = \frac{k}{x}$ (con k costante). La curva $y = \frac{k}{x}$ è un'iperbole equilatera. Si può anche dire così: se il prodotto di due variabili (x, y) si mantiene costante, il punto (x, y) si muove su un'iperbole[4].

11. Si può dimostrare che l'area racchiusa dall'ellisse vale πab. (Il risultato è "ragionevole" se si pensa che il cerchio ha area πr^2, ed è un'ellisse con $a = b = r$). Invece, non esiste una formula semplice che assegni la *lunghezza* dell'ellisse in funzione dei semiassi a, b. Anzi, lo studio della relazione che lega la lunghezza dell'ellisse ai semiassi ha condotto a un intero settore di ricerche in matematica, la *teoria delle funzioni ellittiche*[5].

12. Abbiamo visto che, data l'equazione di una conica, si può decidere se si tratti di ellisse, parabola o iperbole esaminando il segno del discriminante $(b^2 - 4ac)$. Questo può vedersi come il discriminante di un trinomio di secondo grado che avrà, rispettivamente $2, 1, 0$ radici reali nel caso iperbolico, parabolico, ellittico. In matematica ci sono molte altre questioni in cui si presenta una analoga classificazione: un certo oggetto matematico può essere di 3 tipi diversi, a seconda del segno del discriminante di un certo trinomio di secondo grado. Per *analogia* con la classificazione delle coniche, questi 3 "casi" sono detti allora *caso ellittico*, *caso parabolico*, *caso iperbolico*. Questo succede ad esempio nello studio della *geometria delle superfici* (punti ellittici, parabolici, iperbolici), nello studio delle *equazioni a derivate parziali* (equazioni ellittiche, paraboliche, iperboliche), ecc.

[4] Si noti che se la somma, la differenza, o il rapporto di due variabili (x, y) si mantiene costante, invece, il punto (x, y) si muove su una retta.

[5] Si osservi che sia la parabola che l'iperbole non delimitano una regione di area finita, e non hanno lunghezza finita. Quindi entrambi i problemi (calcolo di area e lunghezza) hanno senso solo per l'ellisse, tra le coniche.

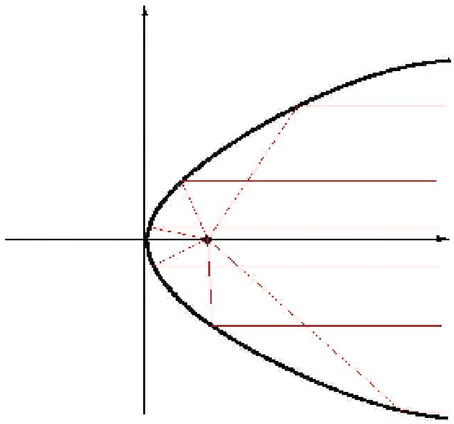


fig.12. Riflessione dei raggi in una parabola

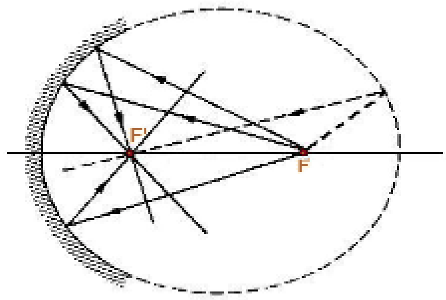


fig.13. Riflessione dei raggi in un'ellisse

5. Cenni alle superfici quadriche

In diversi esempi tra quelli del §4, l'oggetto geometrico coinvolto non è una curva, ma piuttosto una superficie (antenna parabolica, volta ellittica...), come del resto è naturale per il carattere tridimensionale di questi esempi fisici. La forma di queste superfici, tuttavia, è legata alle coniche in quanto le curve che si ottengono sezionando queste superfici con opportuni piani sono appunto delle coniche. Queste superfici, che prendendo il nome dalle coniche corrispondenti si dicono *ellissoidi, paraboloidi, iperboloidi*, sono note, complessivamente, col nome di *superfici quadriche*, o semplicemente *quadriche*. Dal punto di vista della geometria analitica, una quadrica è, per definizione, il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate (x, y, z) soddisfano un'equazione algebrica di secondo grado in x, y, z, del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

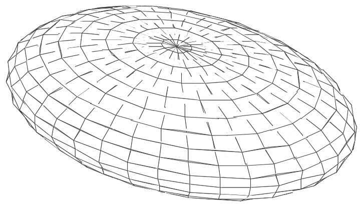
ovvero, in forma matriciale:

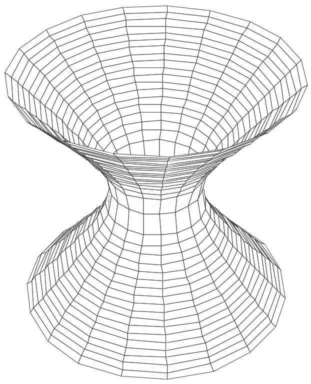
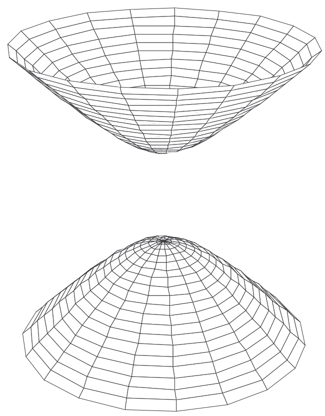
$$(x\, y\, z\, 1)\boldsymbol{A}(x\, y\, z\, 1)^T = 0$$

dove $\boldsymbol{A}$ è la matrice reale simmetrica 4×4 di coefficienti a_{ij}.

Con i metodi dell'algebra lineare è possibile, data una qualsiasi quadrica, determinare una rototraslazione degli assi x, y, z mediante la quale l'equazione della quadrica si riduce a forma canonica; questo consente di classificare le quadriche e studiarne le proprietà.

Qui ci limitiamo a presentare l'equazione canonica e l'immagine dei vari tipi di quadrica reale non degenere. Si tratta di superfici molto importanti, che lo studente incontrerà (come già visto negli esempi del §4) in molte applicazioni. Lo studente incontrerà ancora qualcuna di queste superfici nello studio del calcolo infinitesimale in più variabili.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
ellissoide reale, di semiassi a, b, c


$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
iperboloide iperbolico (o ip. a una falda)	iperboloide ellittico (o ip. a due falde)
	

$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$
paraboloide ellittico	parabolide iperbolico