

Indice

1	Analisi Multirisoluzione	6
1.1	Basi di Riesz	6
1.2	Analisi Multirisoluzione su $L^2(\mathbb{R})$	10
1.2.1	Esempi di Analisi Multirisoluzione su $L^2(\mathbb{R})$	11
1.3	Analisi multirisoluzione su $L^2(\mathbb{T})$	12
2	Ondine	13
2.1	Costruzione di funzioni scala ortonormali	13
2.2	MRA ed approssimazione con risoluzione prefissata	15
2.3	Costruzione di ondine ortonormali	18
2.3.1	Il Teorema di esistenza	18
2.3.2	Un Esempio	21
2.4	Caso Biortogonale	21
2.4.1	Preliminari	21
2.4.2	Esistenza di $\{F_n\}$	22
2.4.3	Costruzione di ψ e $\{F_n\}$	25
2.4.4	Un esempio	27
2.5	Fast Wavelet Transform	29
2.5.1	L'Algoritmo	29
2.6	Costruzione di ondine periodiche	31
2.7	Caratterizzazione di alcuni spazi funzionali mediante coefficienti wavelets	32
2.7.1	Gli Spazi di Besov	32
2.7.2	Gli Spazi L^p	34

3	Approssimazione non lineare	35
3.1	I concetti fondamentali	35
3.2	Approssimazione lineare e approssimazione non lineare	36
3.3	Approssimazione lineare in L^p e in $B_q^{s,p}$	39
3.4	Approssimazione Wavelet non lineare in L^p	42
3.5	Approssimazione Wavelet non lineare in H^1	45
4	Un problema di approssimazione non lineare	47
4.1	Il problema e approssimazione lineare	47
4.2	Soluzione con un metodo non lineare	49
4.2.1	Costruzione dell'algoritmo risolutivo	49
4.2.2	Stima dell'errore	50
5	Esperimenti numerici	54
5.1	Implementazione dell'algoritmo	54
5.2	Esperimenti numerici	56
5.2.1	Due casi	57
6	Conclusioni	64

Introduzione

Fra i metodi non lineari per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, hanno assunto una particolare rilevanza i metodi adattativi, che permettono di ottenere una buona approssimazione anche nel caso in cui la soluzione presenti scarsa regolarità.

Fra i metodi adattativi, stanno poi assumendo una particolare importanza quelli basati sull'uso di basi di wavelets [13]. Infatti, grazie alle proprietà di localizzazione in spazio e in frequenza di queste funzioni, si possono costruire degli schemi di approssimazione che accoppiano, da un lato ordine elevato, e dall'altro la possibilità di raffinare (molto facilmente) la discretizzazione in prossimità delle singolarità. Addirittura, grazie alle proprietà di caratterizzazione di norme tramite coefficienti wavelet è possibile individuare automaticamente dette singolarità solo guardando il valore assoluto dei coefficienti.

Recentemente è stata introdotta una tecnica di approssimazione wavelet non lineare dalla struttura particolarmente semplice, ma con delle proprietà molto promettenti.

Se $\{\psi_I\}_I$ è la base delle wavelets scelta, data una funzione f nota, la si approssima con elementi di Σ_N ,

$$\Sigma_N = \left\{ S : S = \sum_{I \in \Lambda} a_I \psi_I, \Lambda \subset D, \#\Lambda \leq N \right\}, \quad (1)$$

semplicemente considerando il suo sviluppo infinito $\sum_I a_I \psi_I$ in base di wavelets e mantenendone gli N termini corrispondenti agli N coefficienti più grandi (in modulo). La funzione f viene quindi approssimata usando N funzioni di base, ma queste, a differenza di quanto avviene nel caso dell'approssimazione lineare, non sono scelte a priori, ma in funzione della stessa f .

In [1] si dimostra che tale metodo ha ordine di convergenza (in L^p) α , se la funzione approssimanda f appartiene allo spazio di Besov $B_\tau^{\alpha,\tau}$ ($1/\tau = s + 1/p$). Nel caso lineare si ha invece ordine di approssimazione α solo se f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{\alpha,p}$. Potendo essere $B_\tau^{\alpha,\tau}$ molto più grande di $W^{\alpha,p}$, per ottenere un medesimo ordine di approssimazione, le condizioni di regolarità richieste alla funzione

nel caso non lineare sono, quindi, più deboli di quelle richieste nel caso lineare. In particolare funzioni che presentano delle singolarità non apparterranno a $W^{\alpha,p}$ (per α grande), mentre potranno appartenere a $B_r^{\alpha,\tau}$. Esse quindi non potranno essere in genere ben approssimate con un metodo lineare, mentre una approssimazione di tipo non lineare permetterà di avere un buon ordine di convergenza.

Quello che ci proponiamo è di applicare l'idea di DeVore nell'ambito della risoluzione di equazioni differenziali ellittiche. La difficoltà sostanziale passando dalla teoria dell'approssimazione, alla sua applicazione alla risoluzione numerica di equazioni differenziali, è che nel primo caso abbiamo a disposizione informazioni esplicite sulla funzione da approssimare, mentre nel secondo caso abbiamo solo delle informazioni indirette, la soluzione essendo naturalmente incognita, dipendenti dalle proprietà specifiche dell'operatore differenziale.

In questa ottica, data un'equazione differenziale, dovremo dunque costruire un algoritmo per la sua risoluzione, che forzi la soluzione ad appartenere a Σ_N , senza dover scegliere a priori le N funzioni di base da usare.

Il problema che considereremo è il seguente:

Problema 0.0.1 *trovare $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{T})$, dove \mathbb{T} è il cerchio unitario, che verifichi*

$$\begin{aligned} -(a\mathbf{u}')' + b\mathbf{u}' + c\mathbf{u} &= f, & a, b, c \in C^\infty, f \in L^2(\mathbb{T}) & \quad (2) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}'(0) &= \mathbf{u}'(1) \end{aligned}$$

Per semplicità notazionale ci limiteremo, in questa tesi, al caso monodimensionale con condizioni al bordo periodiche. Vorremmo però far notare che i risultati teorici ottenuti sfruttano solo le proprietà di ellitticità dell'operatore e le buone proprietà delle basi di wavelet, e saranno quindi facilmente generalizzabili ad equazioni più generali.

Introdurremo un algoritmo basato sullo schema di Richardson. Inizieremo ri-

scrivendo formalmente il problema nel seguente modo:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

dove A è l'operatore differenziale $-\frac{d^2}{dx^2} + I$, formalmente rappresentato da una matrice di dimensione infinita. Partendo da un initial guess \mathbf{u}_0 , definiremo ricorsivamente

$$D\mathbf{u}^{n+1} = D^{-1}(P_N(D\mathbf{u}^n + \theta D^{-1}(\mathbf{g} + A\mathbf{u}^n))),$$

essendo D un opportuno operatore diagonale di preconditionamento, $P_N u = \sum_{\Lambda} \tilde{c}_I \psi_I$ (dove $\tilde{c}_I = |I|^{-1} c_I$ e Λ contenente gli N più grandi coefficienti \tilde{c}_I): P_N è l'operatore di approssimazione non lineare di DeVore [1].

Naturalmente, dal punto di vista implementativo, per costruire l'algoritmo risolutivo troncheremo gli operatori ad un livello $jmax$, che rappresenterà quindi il livello massimo di discretizzazione dell'approssimazione cercata. A questo punto si sceglierà $jmax$ tale che $2^{jmax} \gg N$ (θ dipenderà in generale da $jmax$).

Nella tesi si trova dimostrato il seguente:

Teorema 0.0.1 *Siano $e_n = u^n - u$ l'errore di approssimazione del nostro algoritmo al passo n , $e(jmax)$ l'errore dovuto alla troncatura al livello $jmax$, allora*

$$\|e_n\|_{H^1} \leq \gamma^n \|e_o\|_{H^1} + \frac{C}{1-\gamma} N^{-s} + e(jmax) \quad (3)$$

dove $\gamma < 1$, C è una costante che dipende solo dai dati iniziali e s soddisfa $1/\tau = s + 1/2$.

Presenteremo inoltre alcune simulazioni numeriche effettuate sull'algoritmo. Essi mostrano come l'errore di approssimazione, misurato in norma L^2 e in norma H^1 , decresca effettivamente all'aumentare di N ; tali risultati sono inoltre coerenti con la stima dell'errore fornita: effettivamente esiste un numero di iterazioni, che può essere stabilito a priori, oltre il quale non vi è alcuna diminuzione significativa dell'errore di approssimazione.

I possibili sviluppi di questo lavoro possono riguardare, da un lato l'applicazione dell'algoritmo ad equazioni ellittiche in più dimensioni che facciano intervenire condizioni al bordo su aperti Ω "poco regolari" [11], dall'altro un'ottimizzazione dello

stesso dal punto di vista computazionale.

Per quanto riguarda il primo problema, ciò significherà introdurre una base di wavelets in più dimensioni e capire come questa possa essere utilizzata su bordi di aperti Ω , anche poco regolari. Per quanto riguarda, invece, il secondo problema sarà importante localizzare a priori, in qualche modo, prima di ogni iterazione, i coefficienti più grandi, così da ridurre il costo computazionale del metodo ed ottenere, ad ogni passo, un numero di operazioni dello stesso ordine di N .

Capitolo 1

Analisi Multirisoluzione

1.1 Basi di Riesz

[10] Sia B uno spazio di Banach e $\{f_k\}_k$ una famiglia di elementi di B che generano lo spazio, cioè tali che B sia la chiusura in norma di B delle combinazioni lineari delle f_k . La famiglia $\{f_k\}_k$ si chiama base di B , se ogni elemento $g \in B$ può essere rappresentato in maniera unica nella forma $g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, dove la serie converge in norma. Quando lo spazio in cui lavoriamo è uno spazio di Hilbert, le basi più usate sono quelle ortonormali; in particolare esse sono anche incondizionate, cioè tali che la serie che rappresenta g converge a g incondizionatamente.

Introdurremo ora un tipo più generale di basi incondizionate: le basi di Riesz.

Definizione 1.1.1 *Sia H uno spazio di Hilbert. Una famiglia $\{f_k\}_k \subset H$ si chiama base di Riesz di H se*

(a) $\{f_k\}_k$ è una base per H , cioè $\forall g \in H$ esiste un'unica successione c_k tale che

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \quad (1.1)$$

(b) *Esistono costanti positive A, B tali che $\forall g \in H$ della forma (1.1) si abbia*

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|g\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (1.2)$$

Chiaramente ogni base ortonormale di H è anche una base di Riesz di H (con $A = B = 1$), ma il concetto di base di Riesz è molto più generale.

Sia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base di Riesz per H . Possiamo definire un'applicazione lineare $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$ nel seguente modo: per ogni successione $\bar{c} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ in ℓ^2 poniamo $T\bar{c} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$. Si noti che questa serie converge in H , poichè per $m \geq n$ grazie a (b)

$$\left\| \sum_{k=n}^m c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=n}^m |c_k|^2.$$

Inoltre, sempre per (a) e per (b) (disuguaglianza di sinistra), T è suriettiva e invertibile. In definitiva T realizza un isomorfismo tra $\ell^2(\mathbb{N})$ e H . Inoltre la serie in (1.1) converge incondizionatamente.

Teorema 1.1.2 *Sia $\{f_k\}_k$ una famiglia che genera H . Essa è una base di Riesz se e solo se esistono costanti positive A e B tali che per ogni famiglia finita di numeri c_1, \dots, c_n si abbia*

$$A \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (1.3)$$

Dimostrazione: Occorre solo dimostrare un'implicazione, essendo l'altra ovvia. Supponiamo quindi vera la (1.3). Per prima cosa vediamo che $\{f_k\}$ è un insieme linearmente indipendente. Se per assurdo $\{f_k\}$ non fosse linearmente indipendente, esisterebbe una successione $\{c_k\} \neq \{0, \dots, 0\}$ tale che

$$\sum_k c_k f_k = 0 \quad (1.4)$$

(si intende convergenza in norma $\|\cdot\|$). Senza perdita di generalità possiamo assumere $c_1 = -1$. Quindi (1.4) implicherebbe $\forall \epsilon \exists n :$

$$\|f_1 - \sum_{k=2}^n c_k f_k\|^2 < \epsilon,$$

allora per (1.3) avremmo $1 + \sum_{k=2}^n |c_k|^2 < A^{-1}\epsilon$. Infatti

$$A + A \sum_{k=2}^n |c_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \|f_1 - \sum_{k=2}^n c_k f_k\|^2 < \epsilon.$$

Ciò è assurdo, bastando prendere $\epsilon < A$.

Sia ora $g \in H$ e sia $g_r = \sum_k c_k^r f_k$ una successione di combinazioni lineari finite di f_k convergenti a g in norma (questa esiste perchè la famiglia $\{f_k\}$ genera H).

Fissiamo $\epsilon > 0$. Si ha da (1.3) che $\forall \epsilon \exists F : \forall r, s > F$

$$A \sum_k |c_k^r - c_k^s|^2 \leq \|g_r - g_s\|^2 < \epsilon.$$

Quindi $\{c_k^r\}_k$, essendo di Cauchy, converge in $\ell^2(\mathbb{N})$ a una successione $\{c_k\}_k$. Poniamo $\sigma_n = \sum_{k=1}^n c_k f_k$. Allora per $m > n$

$$\|\sigma_n - \sigma_m\|^2 \leq B \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$$

cosicchè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ converge in norma a un elemento $\tilde{g} \in H$. Si ha per ogni n e r

$$\|\tilde{g} - g\| \leq \|\tilde{g} - \sigma_n\| + \|\sigma_n - g_r\| + \|g_r - g\|$$

Allora per (1.3)

$$\|\sigma_n - g_r\| \leq B^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k^r - c_k|^2 \right)^{1/2} + B^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Quindi $\|\sigma_n - g_r\| \rightarrow 0$ per $n, r \rightarrow \infty$. Poichè si ha anche $\|\tilde{g} - \sigma_n\| \rightarrow 0$ e $\|g_r - g\| \rightarrow 0$ per $n, r \rightarrow \infty$, ne segue $g = \tilde{g}$; quindi (1.1) vale. Da (1.3), per continuità, si ottiene anche (1.2). ♣

ESEMPIO. Sia V lo spazio delle funzioni g che assumono valore costante $g(k)$ su ogni intervallo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ e tali che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 < \infty.$$

Sia $\chi_{[0,1)}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1)$. Allora è ovvio che V sia un sottospazio chiuso di L^2 e che le funzioni $\chi_{[0,1)}(x - k)$ costituiscono una base di Riesz (qui addirittura ortonormale) di V .

Il seguente Teorema (cfr. [10]) è un'utile caratterizzazione, mediante la trasformata di Fourier, delle basi di Riesz per sottospazi di $L^2(\mathbb{R})$ della forma $\{f(x - k)\}$.

Teorema 1.1.3 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia V il sottospazio generato dalle funzioni $\{f(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Allora tali funzioni costituiscono una base di Riesz per V se e solo se esistono costanti positive a, b tali che*

$$a \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(x + 2k\pi) \right|^2 \leq b \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

In particolare tale famiglia è una base ortonormale se e solo se $a = b = 1$

Osservazione 1.1.4 *Per ogni base di Riesz $\{f_k\}_k$ è possibile definire una base duale (o biortogonale). Data infatti $\{f_k\}_k$, esiste unica la famiglia di elementi $\tilde{f}_k \in H$ tali che $(f_k, \tilde{f}_j) = \delta_{k,j}$. L'insieme $\{\tilde{f}_k\}_k$ in tal modo costruito viene chiamato base duale di $\{f_k\}_k$. Chiaramente i coefficienti dello sviluppo (1.1) sono dati da $c_k = (g, \tilde{f}_k)$. Il concetto di base duale sarà fondamentale per le idee sviluppate in 2.4.*

1.2 Analisi Multirisoluzione su $L^2(\mathbb{R})$

Definizione 1.2.1 Un'analisi multirisoluzione (MRA) di $L^2(\mathbb{R})$ è una successione crescente $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ di sottospazi chiusi di $L^2(\mathbb{R})$ soddisfacenti le seguenti proprietà:

- (i) $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = 0$ $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$
- (ii) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}$ si ha $f(x) \in V_j$ se e solo se $f(2x) \in V_{j+1}$
- (iii) Esiste una funzione $g \in V_0$ t.c. $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una base di Riesz per lo spazio V_0

La funzione g si chiama funzione scala dell'analisi multirisoluzione

In sostanza tutti gli spazi V_j sono la versione “in scala” dello spazio V_0 . Per (ii) si vede che la successione $\{2^{j/2}g(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base di Riesz per V_j . In particolare $f \in V_j$ se e solo se f è della forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k 2^{j/2} g(2^j x - k), \quad \{c_k\} \in \ell^2.$$

Osservazione 1.2.2 Se $g \in V_0$, allora $2^{-1}g(x/2) \in V_{-1} \subset V_0$, per cui $2^{-1}g(x/2)$ si può esprimere mediante uno sviluppo nella base di Riesz $\{g(x-k)\}$. Si ha quindi

$$2^{-1}g(x/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k g(x-k) \tag{1.6}$$

e passando alle trasformate di Fourier

$$\hat{g}(2t) = m_0(t)\hat{g}(t) \tag{1.7}$$

dove $m_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikt}$.

Definizione 1.2.3 Una MRA si dice r -regolare $0 \leq r < \infty$ se essa ammette una funzione scala g di classe C^r tale che $\forall m \in \mathbb{N} \exists C_m > 0 : \forall n \ 0 \leq n \leq r$ si abbia

$$|D^n g(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si dirà infine che una MRA è ∞ -regolare se è r -regolare $\forall r$.

1.2.1 Esempi di Analisi Multirisoluzione su $L^2(\mathbb{R})$

(A) Le costanti a tratti.

Sia V_0 lo spazio delle funzioni di L^2 costanti su ogni intervallo del tipo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Sia V_j lo spazio delle funzioni di L^2 costanti su ogni intervallo $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Evidentemente $V_j \subset V_{j+1}$ per ogni j e l'unione di tali spazi è densa in L^2 . Infatti se $f \in L^2$ è ortogonale a tutti i V_j , allora

$$\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(x)dx = 0 \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}$$

Per densità $\int_a^b f(x)dx = 0$ per ogni $a < b$, da cui $f = 0$ q.o. La proprietà (ii) è ovvia, mentre la proprietà (iii) vale con $g = \chi_{[0,1)}$, funzione caratteristica di $[0, 1)$.

L'analisi multirisoluzione sopra descritta è detta di Haar.

Si noti che in questo caso, posto $P_j f = \sum_k c_{j,k} \chi_{[0,1)}(2^j x - k)$, i coefficienti $c_{j,k}$ sono le medie di f sugli intervalli $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$.

(B) Le lineari a tratti.

Sia V_0 lo spazio delle funzioni di L^2 lineari su ogni intervallo del tipo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Sia V_j lo spazio delle funzioni di L^2 lineari su ogni intervallo $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Con un ragionamento analogo a quello fatto nel caso delle costanti a tratti si ha che $V_j \subset V_{j+1}$ per ogni j e l'unione di tali spazi è densa in L^2 . La proprietà (ii) è evidente, mentre la proprietà (iii) vale con

$$g(x) = \begin{cases} -2|x| + 1 & \text{se } -1/2 \leq x \leq +1/2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa MRA sarà usata nel Capitolo 4, per realizzare i test numerici.

1.3 Analisi multirisoluzione su $L^2(\mathbb{T})$

Partendo da un'analisi multirisoluzione per $L^2(\mathbb{R})$, possiamo costruire una MRA per $L^2(\mathbb{T})$. Si consideri la seguente

Definizione 1.3.1 $g_j^{\text{per}}(x)$ è detta **periodizzata** di g se

$$g_j^{\text{per}}(x) = 2^{j/2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} g(2^j(x+r)), \quad j \geq 0$$

Definiamo V_j^{per} in questo modo

$$V_j^{\text{per}} = \text{span}\{g_j^{\text{per}}(x - 2^{-j}k) : k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^j\} \quad (1.8)$$

A questo punto si può dimostrare [6] la seguente

Proposizione 1.3.2 Se V_j^{per} è definito come in (1.8), allora si ha

- (1) $V_j^{\text{per}} \subset V_{j+1}^{\text{per}}$
- (2) $\bigcup_{j=0}^{+\infty} V_j^{\text{per}}$ è denso in $L^2(\mathbb{T})$
- (3) $\dim V_j = 2^j$ e $V_0 = \{\text{costanti}\}$

Capitolo 2

Ondine

2.1 Costruzione di funzioni scala ortonormali

[6] Nella definizione di analisi multirisoluzione le funzioni $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ costituiscono una base di Riesz, ma non, in generale, una base ortonormale di V_0 .

Vediamo ora come sia possibile, partendo da una base di Riesz del tipo $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ per un sottospazio chiuso $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$, costruire una funzione $\phi \in V$ tale che $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una base ortonormale di V stesso.

Teorema 2.1.1 *Sia $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un sottospazio chiuso ed esista $g \in V$ tale che $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una base di Riesz di V . Si definisca $\phi \in L^2$ mediante:*

$$\hat{\phi}(x) = \hat{g}(x) \left(\sum_k |\hat{g}(x + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2} \quad (2.1)$$

Allora $\phi \in V$ e la famiglia $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ costituisce una base ortonormale di V . Inoltre per ogni $\xi \in V$ la successione $\{\xi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di V se e solo se $\hat{\xi}(x) = \hat{\phi}(x)\rho(x)$ ove ρ è periodica di periodo 2π e $|\rho(x)| = 1$ q.o.

Dimostrazione: Denotiamo con $\mathcal{F}V \subset L^2$ lo spazio delle trasformate di Fourier delle funzioni di V .

Per ogni $f \in V$ della forma $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(x-k)$, sia $m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt}$.

Sappiamo che $\hat{f}(t) = \hat{g}(t)m(t)$, con $m \in L^2(T)$. Quindi si ha

$$\mathcal{F}V = \{\hat{g}(t)m(t) : m \in L^2(T)\}.$$

Definiamo un'applicazione lineare isometrica \mathcal{U} di V su $L^2(\mathbb{T})$ nel seguente modo: posto $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(t + 2k\pi)|^2$, definiamo per ogni f

$$\mathcal{U}(f)(t) = m(t)s(t)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Allora $\mathcal{U}(f)(t)$ ha periodo 2π e, con un semplice conto, si ha

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{U}(f)(t)|^2 dt.$$

Quindi \mathcal{U} è un'isometria di V in $L^2(\mathbb{T})$. In particolare si osserva che \mathcal{U} conserva il prodotto interno, cioè $(f_1, f_2) = (\mathcal{U}(f_1), \mathcal{U}(f_2))$, ove il primo prodotto è in $L^2(\mathbb{R})$, mentre il secondo è in $L^2(\mathbb{T})$.

L'isometria \mathcal{U} è anche suriettiva. Infatti, poichè, per il Teorema 1.1.3, $0 < a \leq s(t) \leq b$, ogni funzione q in $L^2(\mathbb{T})$ si può scrivere come $q(t) = m(t)s(t)^{1/2}$, con $m(t) = q(t)/s(t)^{1/2} \in L^2(T)$.

L'isometria \mathcal{U} ha la proprietà di trasformare la traslazione di n nella moltiplicazione per e^{-int} , cioè

$$\mathcal{U}(f(x - n))(t) = e^{-int}\mathcal{U}(f)(t).$$

Ciò si vede da (2.2). Se infatti $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(x - k)$, allora $f(x - n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(x - n - k)$ e quindi:

$$\mathcal{U}(f(x - n))(t) = e^{-int}m(t)s(t)^{1/2} = e^{-int}\mathcal{U}(f)(t). \quad (2.3)$$

Ciò premesso, cerchiamo $\phi \in V$ in modo che $\{e^{-int}\mathcal{U}(\phi)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sia una base ortonormale di $L^2(\mathbb{T})$. Allora per (2.3) e poichè \mathcal{U} conserva il prodotto interno ed è suriettiva, le funzioni $\phi(x - n_{n \in \mathbb{Z}})$, saranno una base ortonormale di V .

La scelta più semplice è la funzione ϕ tale che $\mathcal{U}(\phi) = 1$ (tale ϕ esiste per la suriettività). La relazione $\mathcal{U}(\phi) = 1$ equivale a $m(t) = s(t)^{-1/2}$, ovvero a $\hat{\phi}(t) = \hat{g}(t)s(t)^{-1/2}$. Quindi ϕ è un elemento ben definito di V con le proprietà desiderate.

Sia ora $\xi \in V$ un'altra funzione tale che $\{\xi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ costituisce una base ortonormale di V . Allora facendo svolgere a ϕ il ruolo prima svolto da g , otteniamo

$$\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k \phi(x - k)$$

per opportuni coefficienti c'_n . Quindi $\hat{\xi}(t) = \hat{\phi}(t)\rho(t)$, con

$$\rho(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{-int}.$$

Inoltre per quasi ogni x

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\xi}(x + 2n\pi)|^2 = |\rho(t)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(x + 2n\pi)|^2 = |\rho(t)|^2.$$

Ciò per il Teorema 1.1.3. Ne segue che $|\rho(t)| = 1$ q.o.

Viceversa è chiaro che se $\hat{\xi}(t) = \hat{\phi}(t)\rho(t)$, con $|\rho(t)| = 1$ q.o. e periodica, allora ξ appartiene a V e $\{\xi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale sempre per il Teorema 1.1.3. Tale sistema è anche completo in V , poichè $\hat{\phi}(t) = \hat{\xi}(t)\rho(\bar{t})$, e quindi ϕ (e di conseguenza tutte le sue traslate) appartiene allo spazio generato dalle $\xi(x - n)$. ♣

Osservazione 2.1.2 *In questo capitolo supporremo di avere scelto una tale funzione scala ϕ , ovvero supporremo che $\{2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ sia una base ortonormale di V_j .*

2.2 MRA ed approssimazione con risoluzione prefissata

[10] La struttura di analisi multirisoluzione permette di approssimare una data funzione di $L^2(\mathbb{R})$ con crescente risoluzione al crescere di j . Denotando con $P_j f$ la proiezione ortogonale di f su V_j , è significativo il seguente

Teorema 2.2.1 *Sia V_j una MRA e $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora*

$$\|f - P_j f\|_2 \rightarrow 0 \quad j \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione: Possiamo supporre $f \notin \bigcup_j V_j$, altrimenti il risultato è ovvio. Esiste una successione di elementi $f_j \in V_j$ tali che $\|f - f_j\|_2 \rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$ (poichè $V_j \subset V_{j+1}$ e $\bigcup V_j$ è densa in L^2). Siccome $P_j f$ è la proiezione di f su V_j , si ha

$$\|f - P_j f\|_2 \leq \|f - f_j\|_2.$$

♣

Vogliamo ora mostrare come sia possibile passare da un'approssimazione di una funzione f con risoluzione j , ad una con risoluzione $j + 1$.

Definizione 2.2.2 *Sia V_j una analisi multirisoluzione. Denotiamo con W_j il complemento ortogonale di V_j in V_{j+1} e con D_j la proiezione ortogonale su W_j .*

Ciò equivale a dire $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, (\oplus somma diretta ortogonale).

Lemma 2.2.3 $\forall j \in \mathbb{Z}$ si ha $D_j = P_{j+1} - P_j$. Inoltre $f(x) \in W_0$ se e solo se $f(2^j x) \in W_j$.

Dimostrazione: Ogni $f \in L^2$ si decompone come $f = P_j f + (1 - P_j)f$. Inoltre $(1 - P_j)f$ si decompone ulteriormente come

$$(1 - P_j)f = P_{j+1}(1 - P_j)f + (1 - P_{j+1})(1 - P_j)f. \quad (2.4)$$

Si hanno poi

$$P_{j+1}(1 - P_j)f = (P_{j+1} - P_j)f \quad (2.5)$$

$$(1 - P_{j+1})(1 - P_j)f = (1 - P_{j+1})f. \quad (2.6)$$

Perciò f si decompone nelle tre parti mutuamente ortogonali

$$f = P_j f + (1 - P_{j+1})f + (P_{j+1} - P_j)f, \quad (2.7)$$

e quindi il terzo addendo rappresenta la proiezione ortogonale su W_j .

La seconda affermazione segue dal punto (ii) della definizione di analisi multirisoluzione. Infatti, $f(x) \in V_1$ se e solo se $f(2^j x) \in V_{j+1}$ e $g \in V_0$ se e solo se $g(2^j x) \in V_j$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(2^j x)\overline{g}(2^j x)dx.$$

Quindi $f \in W_0$ se e solo se il secondo integrale è nullo per ogni $g(2^j x)$, cioè se e solo se $f(2^j x) \in W_j$. ♣

Il precedente lemma mostra che per passare da un'approssimazione di una funzione f con una risoluzione j ad una con risoluzione $j + 1$, il “dettaglio” di f da aggiungere è rappresentato da $D_j f$ ed è contenuto in W_j .

Teorema 2.2.4 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} D_j f \quad (2.8)$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|D_j f\|_2^2 \quad (2.9)$$

Dimostrazione: Per le proprietà di inclusione degli spazi V_j , si ha $P_m P_n = P_n P_m = P_n$ se $m \geq n$. Quindi per ogni $f \in L^2$ e ogni $k > 0$ si ha la decomposizione in fattori mutuamente ortogonali

$$f = (1 - P_{k+1})f + \sum_{j=-k}^k (P_{j+1} - P_j)f + P_{-k}f,$$

da cui

$$\|f\|^2 = \|(1 - P_{k+1})f\|_2^2 + \sum_{j=-k}^k \|(P_{j+1} - P_j)f\|_2^2 + \|P_{-k}f\|_2^2 \geq \sum_{j=-k}^k \|D_j f\|_2^2.$$

La serie numerica $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|D_j f\|_2^2$ è quindi convergente e di conseguenza la serie di funzioni $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} D_j f$ converge in $L^2(\mathbb{R})$.

Dal Teorema 2.2.1 sappiamo che $\|(1 - P_{k+1})f\|_2^2 \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$. Ne segue che anche $P_{-k}f$ converge.

Detto g il suo limite, si ha necessariamente $g \in \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} V_k = 0$, cosicchè $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} D_j f$ converge a f . ♣

Le proprietà (2.8) e (2.9) equivalgono a dire che $L^2(\mathbb{R})$ è somma ortogonale degli spazi W_k :

$$L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \quad (2.10)$$

oppure

$$L^2(R) = V_0 \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j \quad (2.11)$$

2.3 Costruzione di ondinie ortonormali

[6] A partire da (2.11) sarà importante costruire basi ortonormali per gli spazi W_j ; tuttavia, per il Lemma 2.2.3, tali basi potranno essere costruite tali che siano l'una la versione in scala dell'altra. L'esistenza e la costruzione di tali basi saranno oggetto della seguente sezione

2.3.1 Il Teorema di esistenza

Sia $\{V_j\}$ una MRA di $L^2(\mathbb{R})$, con ϕ funzione a scala ortonormale. Da (1.6) e (1.7) si ha che

$$2^{-1}\phi(x/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi(x-k) \quad (2.12)$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x/2) \bar{\phi}(x-k) dx, \quad (2.13)$$

e passando alle trasformate di Fourier

$$\hat{\phi}(2t) = \hat{\phi}(t)m_0(t) \quad (2.14)$$

Vale, inoltre, il seguente lemma fondamentale

Lemma 2.3.1 *Se $m_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikt}$, dove i coefficienti c_k sono dati da (2.13), allora vale la*

$$|m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 = 1 \quad \text{q.o.} \quad (2.15)$$

Dimostrazione: Sappiamo che $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(t+2k\pi)|^2 = 1$ q.o., da cui $s(2t) = 1$ q.o. Per (2.14) si ha $\hat{\phi}(2t+2k\pi) = m_0(t+k\pi)\hat{\phi}(t+k\pi)$ e quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(t+k\pi)|^2 |\hat{\phi}(t+k\pi)|^2 = 1 \quad \text{q.o.} \quad (2.16)$$

Poichè m_0 ha periodo 2π possiamo separare i k pari da quelli dispari in (2.16). Otteniamo così

$$1 = |m_0(t)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(t+2k\pi)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(t+\pi+2k\pi)|^2$$

$$= |m_0(t)|^2 + |m_0(t + \pi)|^2.$$

cioè la(2.15). ♣

Il seguente Teorema garantisce l'esistenza di una base ortonormale di ordine per $L^2(\mathbb{R})$

Teorema 2.3.2 *Sia V_j una MRA di $L^2(\mathbb{R})$. Allora esiste una funzione $\psi \in W_0$ tale che la famiglia $2^{j/2}\psi(2^j x - k)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ sia una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$*

Dimostrazione: La dimostrazione consisterà nella costruzione di una funzione $\psi(x) \in W_0$ tale che $\{2^{-1/2}\psi(x/2 - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una base ortonormale di W_{-1} . Da ciò, grazie a (2.11) e al Lemma 2.2.3, seguirà poi che la famiglia $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$. Diamo solo le idee fondamentali della dimostrazione, i dettagli si possono trovare in [10]

(Passo 1) Caratterizzazione di W_{-1} in termini della trasformata di Fourier delle sue funzioni.

Sia $g \in V_0$ tale che $\hat{g}(t) = q(t)\hat{\phi}(t)$. Sia inoltre

$$S = \{m(2t)m_0(t) : m \in L^2(\mathbb{T})\},$$

dove m è di periodo 2π . Si ha che

$$g \in W_{-1} \iff \hat{g}(t) = \lambda(t)\overline{m_0}(t + \pi)\hat{\phi}(t) \iff \lambda(t)\overline{m_0}(t + \pi) \in S^\perp \quad (2.17)$$

dove λ soddisfa $\lambda(t) = -\lambda(t + \pi)$ ed è di quadrato sommabile.

(Passo2) Costruzione di una base ortonormale di W_{-1} .

Poniamo, per ogni funzione di periodo π ,

$$q(t) = T(e^{i \cdot \lambda})(t) = \lambda(t)\overline{m_0}(t + \pi)$$

T è un'isometria lineare dello spazio $L^2([0, \pi), \frac{dt}{2\pi})$ su S^\perp . La famiglia di esponenziali

$$\{\sqrt{2}e^{-2int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

costituisce una base ortonormale di $L^2([0, \pi), \frac{dt}{2\pi})$. Poichè un'isometria lineare conserva il prodotto interno, le funzioni $q_n(t) = \sqrt{2}e^{-it}e^{-i2nt}m_0(t+\pi)$ formano una base ortonormale di S^\perp e quindi le funzioni la cui trasformata vale

$$\sqrt{2}e^{-i2nt}e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

costituiscono una base ortonormale di W_{-1} .

(Passo3) Costruzione di ψ .

Si definisca $\psi \in W_0$ mediante la formula

$$\hat{\psi}(2t) = e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t). \quad (2.18)$$

(ovviamente $\hat{\psi}(2t)$ è la trasformata di una funzione in W_{-1} se e solo se $\hat{\psi}(t)$ è la trasformata di una funzione in W_0). Si ha da (2.14), con i c_k forniti da (2.13), $\overline{m}_0(t+\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{c}_k e^{ikt}$.

Passando alle antitrasformate di Fourier in (2.18) otteniamo quindi

$$2^{-1}\psi(x/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \overline{c}_k \phi(x+k-1), \quad \text{ovvero} \quad (2.19)$$

$$\psi(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \overline{c}_k \phi(2x+k-1). \quad (2.20)$$

La trasformata di

$$2^{-1/2}\psi(x/2-n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \overline{c}_k \phi(x+k-n-1)$$

vale esattamente

$$\sqrt{2}e^{-i2nt}e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t)$$

e quindi la famiglia $\{2^{-1/2}\psi(x/2-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di W_{-1} . Ne segue che la famiglia $\{2^{j/2}\psi(2^j x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di W_j . Infine per la mutua ortogonalità degli spazi W_j , $\{2^{j/2}\psi(2^j x - n)\}_{j, n \in \mathbb{Z}}$ formano una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.



Definizione 2.3.3 Sia V_j una analisi multirisoluzione e sia ψ definita come in (2.20). La base ortonormale $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ viene chiamata base di ondine di L^2 associata all'analisi multirisoluzione. La funzione ψ viene chiamata "madre delle ondine".

2.3.2 Un Esempio

Il Sistema di Haar. Sia $\{V_j\}$ l'analisi multirisoluzione di Haar introdotta nel precedente capitolo. Assumiamo come funzione scala $-\chi_{[0,1]}$ al posto di $\chi_{[0,1]}$. Da (2.20) possiamo ricavare senza fatica l'ondina ψ ; a questo scopo calcoliamo prima i coefficienti c_k forniti da (2.13). Si ha

$$c_k = - \int_0^1 \chi_{[0,1]}(2x - k) dx, \quad \text{da cui}$$

$$c_0 = -1/2, \quad c_1 = -1/2, \quad c_k = 0, \quad \text{per gli altri } k.$$

Ne segue $\psi(x) = \chi_{[0,1]}(2x) - \chi_{[0,1]}(2x - 1)$ ovvero

$$\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)},$$

La base di ondine generata da ψ è dunque

$$\psi_{j,n}(x) = \begin{cases} 2^{j/2} & \text{se } x \in [n2^{-j}, n2^{-j} + 2^{-j-1}) \\ -2^{j/2} & \text{se } x \in [n2^{-j} + 2^{-j-1}, (n+1)2^{-j}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si vede inoltre che $m_0(t) = \frac{\exp(it)+1}{2}$.

La base che abbiamo appena esaminato fu costruita nel 1910 dal matematico A. Haar e costituisce il primo esempio di base di ondine.

2.4 Caso Biortogonale

2.4.1 Preliminari

Sia $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una MRA (cfr. la 1.2.1) di L^2 , con funzione scala ϕ , tale che la base $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ non sia necessariamente ortonormale. Vogliamo mostrare come sia

possibile introdurre, a partire da $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, la sua base biortogonale $\{\tilde{\phi}(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (cfr. Osservazione 1.1.4).

Sia data, seguendo [5], una sequenza di proiettori obliqui verificanti le seguenti proprietà:

$$\text{(P1)} \quad P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j, \text{ limitato}$$

$$\text{(P2)} \quad P_j P_{j+1} = P_j, \quad P_{j+1} P_j = P_j$$

$$\text{(P3)} \quad P_j(f(\cdot - k2^{-j}))(x) = P_j f(x - k2^{-j}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{(P4)} \quad P_{j+1}(f(2\cdot))(x) = P_j(f)(2x).$$

Si introducano inoltre i seguenti operatori:

$$\mathcal{C}_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{T}_k : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

così definiti:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_j f(x) &= f\left(\frac{x}{2^j}\right) \\ \mathcal{T}_k f(x) &= f(x - k). \end{aligned}$$

2.4.2 Esistenza di $\tilde{\phi}$

Consideriamo il proiettore $P_0 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_0$.

Poichè $\phi(x - k)_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base di Riesz per V_0 abbiamo:

$$P_0(f) = \sum_k \alpha_k(f) \phi(x - k)$$

con $\alpha_k(f)$ funzionale lineare e continuo. Questo implica che esiste $\tilde{G}_k \in L^2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\alpha_k(f) = (\tilde{G}_k, f).$$

L'insieme $\{\tilde{G}_k\}$ costituisce una base di Riesz per un opportuno sottospazio \tilde{V}_0 di $L^2(\mathbb{R})$. Infatti, dato $\{\xi_k\} \in \ell^2$ esistono due costanti positive a e b tale che

$$a \left(\sum_k \xi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_k \xi_k \tilde{G}_k \right\|_{L^2} \leq b \left(\sum_k \xi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostriamo per prima la disuguaglianza di sinistra, dove $\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{L^2}$.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k \xi_k \tilde{G}_k \right\|_2 &= \sup_{f \in L^2} \frac{\left| \left(\sum_k \xi_k \tilde{G}_k, f \right) \right|}{\|f\|_2} = \\ &= \sup_{f \in L^2} \frac{\left| \sum_k \xi_k \alpha_k(f) \right|}{\|f\|_2} \\ &\leq \sup_{f \in L^2} \frac{\left(\sum_k \xi_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k \alpha_k^2(f) \right)^{1/2}}{\|f\|_2}. \end{aligned}$$

da cui

$$\left\| \sum_k \xi_k \tilde{G}_k \right\|_2 \leq \frac{1}{A} \left(\sum_k \xi_k^2 \right)^{1/2}.$$

Dimostriamo ora la seconda disuguaglianza. Abbiamo

$$\left\| \sum_k \eta_k \phi(x - k) \right\|_2 \leq B \left(\sum_k \eta_k^2 \right)^{1/2},$$

e

$$(\tilde{G}_k, \phi(\cdot - l)) = \delta_{k,l},$$

da cui

$$\begin{aligned} \left(\sum_k \xi_k \tilde{G}_k, \sum_l \xi_l \phi(\cdot - l) \right) &= \sum_k \xi_k^2 \\ \left| \left(\sum_k \xi_k \tilde{G}_k, \sum_l \xi_l \phi(\cdot - l) \right) \right| &\leq \left\| \sum_k \xi_k \tilde{G}_k \right\|_2 \left\| \sum_l \xi_l \phi(\cdot - l) \right\|_2 \\ &\leq \left\| \sum_k \xi_k \tilde{G}_k \right\|_2 \left(\sum_l \xi_l^2 \right)^{1/2} B. \end{aligned}$$

E quindi

$$\left\| \sum_k \xi_k \tilde{G}_k \right\|_2 \geq \frac{1}{B} \left(\sum_l \xi_l^2 \right)^{1/2}.$$

La proprietà (P3) dell'operatore di proiezione implica che $\tilde{G}_k = \mathcal{T}_k G$; infatti $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo

$$P_0(f(\cdot - n))(x) = \sum_k (\tilde{G}_k, f(\cdot - n)) \phi(x - k) \quad (2.21)$$

$$P_0 f(x - n) = \sum_k (\tilde{G}_k, f) \phi(x - n - k) \quad (2.22)$$

e poichè $\phi(x - k)$ è una base di Riesz, visto che i coefficienti dello sviluppo di una funzione sono determinati in modo unico, sostituendo (2.21) e (2.22) in (P3), otteniamo

$$(\tilde{G}_n, f) = (\tilde{G}_0, f(\cdot - n));$$

cioè

$$\tilde{G}_k = \mathcal{T}_k \tilde{\phi} \quad (\tilde{\phi} = G_0).$$

Il sottospazio \tilde{V}_0 può essere caratterizzato tramite l'operatore di proiezione P_0 come immagine del suo aggiunto

$$\tilde{V}_0 = \mathfrak{S}P_0^*.$$

Infatti abbiamo per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (P_0^* \tilde{G}_n, f) &= (\tilde{G}_n, P_0 f) = (\tilde{G}_n, \sum_k (\tilde{G}_k, f) \phi_k) \\ \sum_k (\tilde{G}_n, \phi_k) (\tilde{G}_k, f) &= \sum_k \delta_{n,k} (\tilde{G}_k, f) = (\tilde{G}_n, f). \end{aligned}$$

da cui

$$P_0^* \tilde{G}_n = \tilde{G}_n,$$

che implica

$$F \in \tilde{V}_0 \implies F = P_0^* F \implies F \in \mathfrak{S}P_0^*,$$

e quindi

$$\tilde{V}_0 \subset \mathfrak{S}P_0^*.$$

Per l'inclusione inversa abbiamo

$$P_0^* P_0^* F = P_0^* F,$$

e quindi $F \in \mathfrak{S}P_0^*$ implica che, per un'opportuna $U \in \tilde{V}_0$, $F = P_0^* U = P_0^* P_0^* U = P_0^* F$ per cui possiamo dedurre

$$\begin{aligned} (F, f) &= (P_0^* F, f) = (F, P_0 f) = \\ &= (F, \sum_n (\tilde{G}_n, f) \phi_n) = (\sum_n (F, \phi_n) \tilde{G}_n, f). \end{aligned}$$

Quindi

$$F = \sum_n (F, \phi_n) \tilde{G}_n \in \tilde{V}_0.$$

Analogamente possiamo definire, per un fissato $j \in \mathbb{Z}$, il duale della base ϕ_{jk} di V_j che chiamiamo G_{jk} . Abbiamo

$$P_j(f) = \sum_k (G_{jk}, f) \phi_{jk}.$$

(P4) implica che $P_j(f(2^j \cdot))(x) = P_0 f(2^j x)$. Questo a sua volta implica che

$$G_{jk} = \mathcal{C}_j \mathcal{T}_k \tilde{\phi} = 2^{j/2} \tilde{\phi}(2^j x - k).$$

Si può inoltre dimostrare, similmente a quanto fatto per il sottospazio \tilde{V}_0 , che $\{G_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base di Riesz per il sottospazio $\tilde{V}_j = \mathfrak{S}P_j^*$. Infine si prova che $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$. In altre parole $\{\tilde{V}_j\}$ è una analisi multirisoluzione la cui funzione scala è $\tilde{\phi}$. Indicheremo $\tilde{\phi}_{j,k} = 2^{j/2} \tilde{\phi}(2^j x - k)$ (da cui $G_{j,k} = \tilde{\phi}_{j,k}$). Tutto questo implica che esistono \tilde{h}_k tali che:

$$\tilde{\phi} = \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\phi}_{1k}. \quad (2.23)$$

Inoltre si ha

$$P_j f = \sum_k (f, \tilde{\phi}_{j,k}) \phi_{j,k} \quad (2.24)$$

Osservazione 2.4.1 *Si può dimostrare che vale la condizione di biortogonalità*

$$\int \phi_{j,k} \tilde{\phi}_{j,n} = \delta_{k,n}$$

2.4.3 Costruzione di ψ e $\tilde{\psi}$

A questo punto dobbiamo introdurre, nell'ambito biortogonale in cui stiamo lavorando, la base delle ondine. Limitandoci ai risultati fondamentali (i dettagli si possono trovare in [14]) si può scrivere

$$V_{j+1} = P_j V_{j+1} + (P_{j+1} - P_j) V_{j+1}.$$

Chiameremo W_j il secondo addendo. Si può definire, analogamente a quanto fatto con P_j , il proiettore \tilde{P}_j

$$\tilde{P}_j f = \sum_k (f, \phi_{j,k}) \tilde{\phi}_{j,k}$$

e posso decomporre

$$\tilde{V}_{j+1} = \tilde{P}_j \tilde{V}_{j+1} + (\tilde{P}_{j+1} - \tilde{P}_j) V_{j+1}$$

Chiameremo \tilde{W}_j il secondo addendo.

Se definiamo

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_k g_k \phi_{1,k} \quad \text{e} \quad \tilde{\psi} = \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\phi}_{1,k} \\ \text{con} \\ g_k &= (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \quad \text{e} \quad \tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k} \end{aligned} \tag{2.25}$$

allora si ha che

$$W_j = \text{span}\{\psi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad \tilde{W}_j = \text{span}\{\tilde{\psi}_{jk}, k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.26}$$

inoltre

$$D_j f = (P_{j+1} - P_j) f = \sum_k (f, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \tag{2.27}$$

$$\tilde{D}_j f = (\tilde{P}_{j+1} - \tilde{P}_j) f = \sum_k (f, \psi_{j,k}) \tilde{\psi}_{j,k} \tag{2.28}$$

Osservazione 2.4.2 *Tra gli spazi sopra definiti valgono le seguenti relazioni*

$$W_j \perp \tilde{V}_j \quad \tilde{W}_j \perp V_j$$

Osservazione 2.4.3 *Il caso ortogonale è un caso particolare di quanto trattato fin qui, bastando prendere $\tilde{P}_j = P_j$ proiezione ortogonale su V_j e $\tilde{\phi} = \phi$ funzione scala ortonormale.*

2.4.4 Un esempio

Nell'ambito biortogonale della MRA $\{V_j\}$ in cui ci siamo posti, scegliamo come funzione scala ϕ , la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} -|x| + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq +1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Figura 2.1: La funzione a scala per i test numerici

il che è equivalente ad utilizzare degli elementi finiti lineari a tratti. Sia h il filtro così definito

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1 = h_{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (2.29)$$

Si vede facilmente che tale filtro soddisfa la (2.31).

Come filtro \tilde{h} , necessario per costruire $\tilde{\phi}$, sceglieremo invece la seguente espressione:

$$\tilde{h}_0 = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \tilde{h}_1 = \tilde{h}_{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \tilde{h}_2 = \tilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}. \quad (2.30)$$

$\tilde{\phi}$ è quindi definita come soluzione della (2.23).

Ora possiamo costruire le funzioni ψ e $\tilde{\psi}$: esse si ottengono a partire da (2.29) e da (2.30) usando (2.25).

Riportiamo di seguito i grafici di $\psi, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}$.

Figura 2.2: La funzione ψ

Figura 2.3: La funzione $\tilde{\phi}$

Figura 2.4: La funzione $\tilde{\psi}$

2.5 Fast Wavelet Transform

Sia V_j una MRA e ϕ la sua funzione scala. L'approssimazione di una funzione $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ con risoluzione 2^j è definita come la proiezione ortogonale di $f(x)$ su V_j , che come abbiamo già notato viene indicata con $P_j f$; mentre la proiezione di f su W_j indicata con $D_j f$ rappresenta il dettaglio dell'approssimazione a quella risoluzione.

Poichè $V_0 \subset V_1$ vale la seguente, chiamata equazione di dilatazione:

$$\phi(x) = \sum_k h_k \phi(2x - k) \quad (2.31)$$

Si nota che la ψ madre delle ondine vista in (2.25) può essere scritta in funzione dei coefficienti h_k nel seguente modo:

$$\psi(x) = \sum_k (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \phi(2x - k) \quad \text{ossia} \quad (2.32)$$

$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi_{1k} \quad \text{dove } g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \quad (2.33)$$

Definizione 2.5.1 Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora $f_k^j = \langle f, \tilde{\phi}_{jk} \rangle$ e $d_k^j = \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle$ sono chiamati rispettivamente coefficienti scaling e coefficienti wavelet.

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, grazie a (2.11), si ha

$$f = \sum_k f_k^0 \phi_{0k} + \sum_{j,k} d_k^j \psi_{j,k} \quad (2.34)$$

Tale espressione è il punto di partenza per ogni approssimazione di funzioni mediante wavelets.

2.5.1 L'Algoritmo

La FWT (Fast Wavelet Transform) è un algoritmo rapido che permette di trovare i coefficienti scaling e wavelets di $f \in V_{j+1}$ al livello j , a partire dai suoi coefficienti scaling al livello $j + 1$.

In particolare sia $f \in V_{j+1}$:

$$f = \sum f_{k,j+1} \phi_{j+1,k} \quad (2.35)$$

Poichè $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, f si può scomporre come

$$f = P_j f + D_j f \quad (2.36)$$

dove $P_j f = \sum f_{j,k} \phi_{j,k}$ e $D_j f = \sum d_{j,k} \psi_{j,k}$.

Osservazione 2.5.2 *A partire da (2.31) e da (2.33) si dimostra la seguente*

$$h_k = \int \phi(x) \tilde{\phi}_{1,k}(x) dx, \quad \tilde{h}_k = \int \tilde{\phi}(x) \phi_{1,k}(x) dx \quad (2.37)$$

$$g_k = \int \psi(x) \tilde{\phi}_{1,k}(x) dx, \quad \tilde{g}_k = \int \tilde{\psi}(x) \phi_{1,k}(x) dx \quad (2.38)$$

Ci proponiamo ora di trovare $\{f_{j,k}\}$ data $\{f_{j+1,k}\}$ (per $d_{j,k}$ il discorso è analogo).

Abbiamo

$$\begin{aligned} f_{j,k} &= \int_{\mathbb{R}} f \tilde{\phi}_{j,k} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_n f_{j+1,n} \phi_{j+1,n} \right) \tilde{\phi}_{j,k} dx = \\ &= \sum_n f_{j+1,n} \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1}x - n) 2^{j/2} \tilde{\phi}(2^j x - k) dx = \\ &= \sum_n f_{j+1,n} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \phi(2y - (n - 2k)) \tilde{\phi}(y) dy = \\ &= \sum_n f_{j+1,n} \int_{\mathbb{R}} \phi_{1,n-2k}(y) \tilde{\phi}(y) dy = \quad \text{per (2.38)} \\ &= \sum f_{j+1,n} \tilde{h}_{n-2k} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato:

$$f_k^j = \sum_n \tilde{h}_{n-2k} f_n^{j+1} \quad (2.39)$$

$$d_k^j = \sum_n \tilde{g}_{n-2k} f_n^{j+1}. \quad (2.40)$$

Al contrario ora vogliamo trovare $\{f_{j+1,k}\}$, una volta conosciuti i coefficienti $\{f_{j,n}\}$ e $\{d_{j,n}\}$. Osserviamo che (2.31) e (2.33) implicano

$$\begin{aligned} \phi_{j,n} &= \sum_k h_{2n-k} \phi_{j+1,k} \\ \psi_{j,n} &= \sum_k g_{2n-k} \phi_{j+1,k} \end{aligned}$$

Grazie a (2.36) si ha

$$\begin{aligned}
f &= \sum_n f_{j,n} \phi_{j,n} + \sum_n d_{j,n} \psi_{j,n} = \\
&= \sum_n f_{j,n} \sum_k h_{2n-k} \phi_{j+1,k} + \sum_n d_{j,n} \sum_k g_{n-2k} \phi_{j+1,k} = \\
&= \sum_k \left(\sum_n h_{2n-k} f_{j,n} + \sum_n g_{2n-k} d_{j,n} \right) \phi_{j+1,k}
\end{aligned}$$

Da cui si deduce

$$f_k^{j+1} = \sum_n h_{2n-k} f_n^j + \sum_n g_{2n-k} d_n^j \quad (2.41)$$

La (2.39) e la (2.40) permettono di calcolare i coefficienti wavelets e quelli scaling ad una data risoluzione in funzione di quelli ad una risoluzione più alta, mentre la (2.41) permette di ricostruire i coefficienti ad una data risoluzione a partire da quelli ad una risoluzione più bassa.

La (2.39) e la (2.40) sono alla base dell'algoritmo FWT mentre la (2.41) è alla base dell'algoritmo IFWT.

Siamo ora in grado di fare un cambiamento di base da $\{\phi_{jk}\}_k$ a $\{\phi_{j-1,k}\}_k \cup \{\psi_{j-1,k}\}_k$ cioè di passare da una base per V_j a una per $V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ e dal punto di vista implementativo ciò è molto semplice da realizzare. Applicando ripetutamente la FWT alla base di V_k per $0 \leq k \leq j-1$ otteniamo un cambiamento di base:

$$\{\phi_{jk}\}_k \rightarrow \{\phi_{0,0}\}_k \cup \{\psi_{0,0}\}_k \cup \{\psi_{1,k}\}_k \cup \{\psi_{2,k}\}_k \cup \dots \cup \{\psi_{j-1,k}\}_k \quad (2.42)$$

Passiamo cioè da una base per V_j ad una per $V_0 \oplus_{k=0}^{j-1} W_k$.

2.6 Costruzione di ondine periodiche

A partire dalla base di ondine per $L^2(\mathbb{R})$, possiamo costruire, attraverso un procedimento di *periodizzazione* (cfr. 1.3.1), una base ortonormale di ondine periodiche per $L^2(T)$. Sia ψ la madre delle ondine per una MRA di $L^2(\mathbb{R})$, $\psi_{j,k}^{per}$ e $\tilde{\psi}_{j,k}^{per}$ vengono definite nel seguente modo

$$\psi_{jk}^{per}(x) = 2^{j/2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x+r) - k), \quad j \geq 0, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (2.43)$$

$$\tilde{\psi}_{jk}^{\text{per}}(x) = 2^{j/2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}(2^j(x+r) - k), \quad j \geq 0, k = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

A questo punto, in modo del tutto analogo al caso in $L^2(\mathbb{R})$, e con ovvio significato dei termini, si introducono gli spazi W_j^{per} e vale un analogo teorema di esistenza

Teorema 2.6.1 *La famiglia composta dalla funzione costante 1 e dalle funzioni $\psi_{j,k}^{\text{per}}$ per $j \geq 0$ e $k = 0, \dots, 2^j - 1$ è una base di Riesz di $L^2(T)$ e vale, poichè $\psi_{j,k}^{\text{per}} = \psi_{j,k+m2^j}^{\text{per}} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$,*

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} (f, \psi_{j,k}^{\text{per}}) \psi_{j,k}^{\text{per}}$$

dove (\cdot, \cdot) è in $L^2(T)$.

La dimostrazione del teorema precedente e le giustificazioni delle osservazioni successive si possono trovare in [6]

Osservazione 2.6.2 *Gli spazi W_j^{per} sono finito dimensionali, della stessa dimensione dei corrispettivi V_j^{per} .*

In modo del tutto analogo al caso in \mathbb{R} si definisce una FWT e una IFWT. I filtri h e g dipenderanno in generale da j .

2.7 Caratterizzazione di alcuni spazi funzionali mediante coefficienti wavelets

I coefficienti wavelet forniscono una semplice caratterizzazione di molti spazi funzionali. La norma dello spazio risulterà equivalente ad una particolare espressione dipendente dai coefficienti wavelet.

Noi saremo in particolare interessati a fornire una caratterizzazione per gli spazi L^p e per gli spazi di Besov (cfr. [6]).

2.7.1 Gli Spazi di Besov

Diamo preliminarmente, in dimensione n , una definizione dello spazio di Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ che si basa sul concetto di modulo di continuità. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ,

$|h|$ la norma euclidea di $h \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\Delta_h^r v$ la r -esima differenza in avanti nella direzione del vettore h , definiamo inoltre

$$\Omega_{r,h} = \{x \in \Omega : x + lh \in \Omega, l = 0, \dots, r\},$$

Chiamiamo modulo di continuità

$$\omega(v, t, \Omega)_p := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r v\|_{L^p(\Omega_{r,h})}.$$

Possiamo definire ora la norma nello spazio $B_q^{s,p}$

$$\|v\|_{B_q^{s,p}}^q = \|v\|_{L^p}^q + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{qs_j} \omega_r(v, 2^{-j}, \Omega)_p^q := \|v\|_{L^p}^q + |v|_{B_q^{s,p}}^q$$

dove $s < r$.

Trattare questi spazi funzionali risulta particolarmente semplice usando i coefficienti wavelet. Infatti vale

Teorema 2.7.1 (*Caratterizzazione di $B_q^{s,p}$*). *Sia V_m una MRA r -regolare e sia $r > s > 0$ e $p, q \in [0, +\infty]$. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ allora $f \in B_q^{s,p}(\mathbb{R})$ se e solo se i suoi coefficienti f_{0k} (scaling) e d_{jk} (wavelet) verificano*

$$\left(\sum_k f_{0k}^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{m \geq 0} \left\{ \left(\sum_k d_{mk}^p \right)^{1/p} 2^{ms} 2^{m(1/2-1/p)} \right\}^q \right)^{1/q} \leq +\infty. \quad (2.46)$$

Inoltre questa somma è una norma equivalente per $B_q^{s,p}(\mathbb{R})$.

L'espressione (2.46) è sufficientemente maneggevole: in un certo senso si potrebbe affermare che gli spazi di Besov sono l'ambiente naturale per le onde. Questa affermazione risulterà in parte giustificata quando ci occuperemo di approssimazione non lineare di funzioni.

Se in particolare consideriamo il caso dello spazio $B_\tau^{s,\tau}$ dove $1/\tau = s + 1/p$ (ci poniamo quindi in dimensione $n = 1$) si ottiene

$$\|f\|_{B_\tau^{s,\tau}}^\tau = \sum_{m,k} d_{m,k}^\tau \quad (2.47)$$

Tale spazio si dimostrerà molto utile nel seguito.

2.7.2 Gli Spazi L^p

Chiamiamo I_{jk} l'intervallo $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ e χ_{jk} sia la sua funzione caratteristica. Abbiamo la seguente

Proposizione 2.7.2 (*Caratterizzazione di L^p*). *Abbiamo*

$$\|f\|_p = \left\| \left(\sum_{j,k} d_{jk}^2 2^j \chi_{jk}(x) \right)^{1/2} \right\|_p. \quad (2.48)$$

Inoltre $f \in L^p$ se e solo se il secondo membro è finito.

Capitolo 3

Approssimazione non lineare

3.1 I concetti fondamentali

Il problema fondamentale che ci poniamo è di approssimare una funzione assegnata (*target function*), eventualmente molto complessa, mediante l'uso di funzioni, dette approssimanti, più semplici e più facili da calcolare.

Generalmente l'aumento della risoluzione con cui si vuole approssimare la funzione target implica un aumento della complessità delle approssimanti e un'ovvia crescita del costo computazionale. I primi metodi utilizzavano approssimanti appartenenti a spazi lineari finito-dimensionali (polinomi algebrici e trigonometrici di grado $\leq n$ fissato). A partire dalla fine degli anni '50 venne introdotto l'uso come approssimanti di splines e di polinomi a tratti. A tal proposito basti pensare al metodo degli elementi finiti (FEM).

Negli anni '60, ([Solomyak e Birman ,1967]), vengono messi in evidenza i vantaggi derivanti dal non limitare le approssimanti ad appartenere a spazi lineari: non si impone più alle approssimanti di essere polinomi a tratti su una partizione del dominio fissata a priori, ma, pur controllando il numero di polinomi che compone l'approssimante, si fa dipendere la partizione dalla funzione target: laddove essa è più regolare si usa una partizione meno fitta, al contrario più fitta laddove è meno regolare. Una domanda importante è la seguente:

Che ordine di convergenza dell'errore si ha per l'approssimazione non lineare? Per quali funzioni si ottiene la convergenza con un dato ordine s ? ($\|\text{errore}\|_{L^2} \leq n^{-s}$,

essendo n il numero di gradi di libertà della funzione approssimante)

Una risposta a questa domanda è data dagli spazi di Besov, che possono essere definiti tramite l'ordine di approssimazione di un assegnato metodo non lineare. Un significativo anello di congiunzione tra gli spazi di Besov e la teoria dell'approssimazione non lineare è la teoria delle wavelets. Essa, come evidenziato nel Capitolo 2, fornisce una semplice ed efficace decomposizione di funzioni nella serie di opportuni blocchi e contemporaneamente garantisce una caratterizzazione efficace e maneggevole degli spazi di Besov.

E' naturale ora, nella logica del passaggio da un'approssimazione lineare a una non lineare, che tenga quindi conto, in qualche modo, delle regolarità locali, provare ad approssimare la funzione target scegliendo solo i termini più significativi della sua decomposizione in wavelets. Otteniamo così un metodo di approssimazione non lineare, di cui ricorderemo, nel seguito di questo Capitolo, le proprietà fondamentali.

3.2 Approssimazione lineare e approssimazione non lineare

Prima di prendere in considerazione nello specifico l'approssimazione non lineare mediante wavelets, consideriamo un contesto più generale. Per semplicità ci restringiamo qui al caso di uno spazio di Hilbert, anche se nel seguito considereremo anche il caso L^p .

Sia H uno spazio di Hilbert separabile con prodotto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\|_H$ e sia $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale per H .

Lo scopo che ci prefissiamo è quello di approssimare una data funzione f , mediante combinazione lineare delle funzioni di base, composta al più da n termini.

Consideriamo due diversi approcci: quello lineare e quello non lineare. In ambito lineare, fissiamo a priori lo spazio lineare $H_n := \text{span}\{\eta_k : 1 \leq k \leq n\}$ e chiediamo di approssimare f con un elemento $f_n \in H_n$.

Definiamo l'errore di approssimazione

$$E_n(f)_H := \inf_{g \in H_n} \|f - g\|_H \quad (3.1)$$

Al contrario, nell'ambito non lineare lo spazio H_n viene sostituito dallo spazio Σ_n definito nel seguente modo

$$\Sigma_n = \{g \in H : g = \sum_{k \in \Lambda} c_k \eta_k, \Lambda \subset N, \#\Lambda \leq n\}. \quad (3.2)$$

(Con $\#\Lambda$ indicheremo la cardinalità dell'insieme Λ .) Si noti che a differenza dello spazio H_n , lo spazio Σ_n non è lineare. La somma di due elementi in Σ_n sarà costituita in generale da $2n$ elementi.

Analogamente a E_n definiamo l'errore di approssimazione non lineare nel seguente modo

$$\sigma_n(f)_H := \inf_{g \in \Sigma_n} \|f - g\|_H. \quad (3.3)$$

Ci poniamo la seguente domanda. Dato un numero reale $\alpha > 0$, per quali elementi $f \in H$ abbiamo

$$E_n(f)_H \leq Mn^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

per qualche costante $M > 0$? Denotiamo questa classe di funzioni f con \mathcal{A}^α e definiamo

$$|f|_{\mathcal{A}^\alpha} = \inf\{M : E_n(f)_H \leq Mn^{-\alpha}, \forall n\} \quad (3.5)$$

Denoteremo con \mathcal{B}^α l'analogo di \mathcal{A}^α riferito alla classe dei Σ_n .

E' abbastanza facile caratterizzare le classi di approssimazione sopra definite nei termini dei coefficienti della decomposizione ortogonale

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \eta_k) \eta_k.$$

Nel seguito useremo la notazione:

$$f_k := (f, \eta_k), \quad k \in \mathbb{N}$$

Consideriamo per primo il caso lineare. La migliore approssimazione di f in H_n è data dalla proiezione di f su H_n

$$P_n f := \sum_{k=1}^n f_k \eta_k$$

e l'errore di approssimazione è

$$E_n(f)_H^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|^2.$$

Possiamo caratterizzare \mathcal{A}^α nei termini della somma diadica

$$F_m := \left(\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} |f_k|^2 \right)^{1/2}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Infatti è facile dimostrare (vedi [1]) che

$$f \in \mathcal{A}^\alpha \text{ se e solo se } F_m \leq M2^{-m\alpha}, \quad m \in \mathbb{N}$$

e

$$|f|_{\mathcal{A}^\alpha} \sim \inf\{M : F_m \leq M2^{-m\alpha}\}$$

Consideriamo ora il caso non lineare.

Caratterizzeremo lo spazio \mathcal{B}^α usando un riordinamento decrescente del modulo dei coefficienti f_k .

$$f = \sum_k f_k \eta_k = \sum_k \gamma_k \eta_{n(k)}$$

dove $\gamma_k(f) = f_{n_k}$ e $|\gamma_k(f)| \geq |\gamma_{k+1}(f)|$. Più precisamente denoteremo con $\gamma_k(f)$ il k -esimo elemento di tale riordinamento.

A tal proposito vale il seguente

Lemma 3.2.1 $f \in \mathcal{A}^\alpha$ se e solo se si ha

$$\gamma_n(f) \leq Mn^{-\alpha-1/2}, \quad (3.6)$$

inoltre $|f|_{\mathcal{A}^\alpha} \sim \inf\{M : \gamma_n \leq Mn^{-\alpha-1/2}\}$

Dimostrazione: Osserviamo preliminarmente che $\sigma_n(f)_H^2 = \sum_{k>n} \gamma_k(f)^2$. Se f soddisfa (3.6), allora chiaramente

$$\sigma_n(f)_H \leq CMn^{-\alpha},$$

da cui $f \in \mathcal{B}^\alpha$.

D'altra parte, se $f \in \mathcal{B}^\alpha$, allora

$$\gamma_{2n}(f)^2 \leq n^{-1} \sum_{m=n+1}^{2n} \gamma_m(f)^2 \leq n^{-1} \sigma_n(f)_H^2 \leq |f|_{\mathcal{B}^\alpha}^2 n^{-2\alpha-1}.$$

Poichè una disuguaglianza del genere vale anche per $\gamma_{2n+1}(f)$, otteniamo l'altra implicazione. ♣

Consideriamo ora un semplice, ma istruttivo esempio, da dove si vede chiaramente la differenza tra \mathcal{A}^α e \mathcal{B}^α . Come H prendiamo lo spazio $L^2(T)$ delle funzioni 2π -periodiche sul cerchio unitario e come base il sistema $\{(2\pi)^{-1/2}e^{-ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$. H_n è lo spazio dei polinomi trigonometrici di grado $\leq n$. I coefficienti rispetto a tale base sono i coefficienti di Fourier $\hat{f}(k)$. A questo punto è facile vedere la distinzione tra approssimazione lineare e non lineare. L'approssimazione lineare di un certo ordine corrisponde ad una certa decrescenza dei coefficienti $\hat{f}(k)$ al crescere della frequenza k . In questo caso $\{F_m\}$ è la decomposizione di Littlewood-Paley. L'approssimazione non lineare del medesimo ordine corrisponde, invece, ad una decrescenza dei coefficienti riordinati. Si dimostra [1] che $\mathcal{A}^\alpha = H^\alpha(\mathbb{T})$, mentre $\mathcal{B}^\alpha = B_{\infty,2}^{\alpha,2}(\mathbb{T})$. L'approssimazione non lineare non riconosce la posizione in frequenza dei coefficienti. Se ad esempio riassegnassimo i coefficienti di Fourier di una $f \in \mathcal{B}^\alpha$ a diverse posizioni in frequenza, otterremmo ancora una $f \in \mathcal{B}^\alpha$. Possiamo quindi avere coefficienti grandi in valore assoluto ad alte frequenze, purchè non ve ne siano troppi, e questo non compromette l'ordine di approssimazione non lineare.

3.3 Approssimazione lineare in L^p e in $B_q^{s,p}$

(Spazio $B_q^{s,p}$) Usando la Proposizione 2.7.1 si puo' ottenere una stima dell'errore di approssimazione lineare, nel caso degli spazi $B_q^{s,p}$.

Proposizione 3.3.1 *Sia V_m una MRA r -regolare e sia $f \in B_q^{s,p}(\mathbb{R})$ allora con $0 < t < s < r$ si ha $\forall n \geq 0$*

$$\|f - P_n\|_{t,p,q} \leq C\|f\|_{s,p,q}2^{-n(s-t)}.$$

Dimostrazione: $f - P_n f = \sum_{m \geq n} \sum_k d_{mk} \psi_{mk}$ e applicando la Proposizione 2.7.1 otteniamo

$$\|f - P_n f\|_{t,p,q} = \left(\sum_{m \geq n} \left\{ \left(\sum_k d_{mk}^p \right)^{1/p} 2^{mt} 2^{m(1/2-1/p)} \right\}^q \right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{m \geq n} \left\{ \left(\sum_k d_{mk}^p \right)^{1/p} 2^{m(t-s)} 2^{ms} 2^{m(1/2-1/p)} \right\}^q \right)^{1/q} \\
&\leq 2^{-n(s-t)} \left(\sum_{m \geq n} \left\{ \left(\sum_k d_{mk}^p \right)^{1/p} 2^{ms} 2^{m(1/2-1/p)} \right\}^q \right)^{1/q} \\
&\leq C \|f\|_{s,p,q} 2^{-n(s-t)}.
\end{aligned}$$

♣

(Spazio L^p) Forniamo di seguito una stima dell'errore di approssimazione commesso, utilizzando l'operatore lineare P_n , nel caso degli spazi L^p .

Proposizione 3.3.2 *Sia $\{V_m\}$ una MRA r -regolare. Allora $\forall f \in B_q^{s,p}(\mathbb{R}), 1/p < s < r$ abbiamo*

$$\|f - P_n f\|_p \leq C(f) 2^{-ms}.$$

Dimostrazione: Si ha che

$$f - P_n f = \sum_{m \geq n} \sum_k d_{mk} \psi_{mk}.$$

Definiamo

$$\gamma_{mk} = 2^{ms} 2^{-m(1/p-1/2)} d_{mk}.$$

Applicando la Proposizione 2.7.1 otteniamo

$$\sum_m \sum_k \gamma_{mk}^p \leq C \|f\|_{s,p,p}^p. \quad (3.7)$$

Definiamo ora la seguente funzione:

$$A(x) = \sum_{m \geq n} \sum_k |(f, \psi_{mk})|^2 2^m \chi_{mk}(x).$$

Si fissi x . Abbiamo $\chi_{mk}(x) = 1$ se e solo se $k = k_m(x) = [2^m x]$ (dove $[p]$ indica il più grande intero minore o uguale a p) e quindi:

$$A(x) = \sum_{m \geq n} d_{mk_n(x)}^2 2^m$$

da cui

$$A(x) = \sum_{m \geq n} 2^{-2ms} 2^{2m/p} \gamma_{m, k_m(x)}^2.$$

Si consideri ora l'insieme

$$\Gamma_i = \{(\nu, \eta) : I_{\nu\eta} \subset I_{ni}\}$$

e prendiamo (ν_i, η_i) tali che

$$\gamma_{\nu_i, \eta_i}^2 = \max_{(\nu, \eta) \in \Gamma_i} \gamma_{\nu, \eta}^2.$$

Con queste notazioni e con $x \in [i2^{-n}, (i+1)2^{-n}[$

$$A(x) \leq \gamma_{\nu_i, \eta_i}^2 \sum_{m \geq n} 2^{-2ms} 2^{2m/p}.$$

Sia $\sigma = 2(s - 1/p)$, allora poichè $\sigma > 0$ abbiamo:

$$A(x) \leq \gamma_{\nu_i, \eta_i}^2 2^{-n\sigma} \sum_{j \geq 0} 2^{-j\sigma} \leq \gamma_{\nu_i, \eta_i}^2 2^{-j\sigma} \frac{1}{1 - 2^{-\sigma}}.$$

Ora abbiamo

$$\begin{aligned} \|f - P_m f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{A(x)} \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_i C \gamma_{\nu_i, \eta_i} 2^{-n\sigma/2} \chi_{ni}(x) \right)^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

L'integrando del membro di destra è una funzione costante a tratti e quindi possiamo calcolare il suo integrale in modo esatto. Per cui

$$\|f - P_m f\|_p \leq \left(\sum_i C 2^{-n} 2^n \gamma_{\nu_i, \eta_i}^p 2^{-n\sigma p} \right)^{1/p} \leq C(f) 2^{-ns},$$

dove per il fatto che $i \neq j$ implica $(\nu_i, \eta_i) \neq (\nu_j, \eta_j)$, possiamo maggiorare il secondo membro con la somma della serie (3.7). Con ciò la Proposizione è dimostrata. ♣

Si hanno inoltre i seguenti risultati:

Lemma 3.3.3 *Sia V_m una MRA r -regolare. Se $f = \sum_k f_k \phi_{jk}$, $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ e $s \in \mathbb{N}$, $s \leq r$, allora $\exists C$ tale che:*

$$\|f\|_{s,p} \leq C 2^{js} \|f\|_{0,p}.$$

dove $\|f\|_{s,p} := \|f\|_{s,p,0}$ e $\|f\|_{0,p} := \|f\|_p$.

Proposizione 3.3.4 *Sia V_m una MRA r -regolare. Se $f = \sum_k f_k \phi_{jk}$, $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ e $s \in \mathbb{N}$, $s \leq r$, allora $\exists C$ tale che si ha:*

$$\|f\|_{s,p} \leq C 2^{sm} 2^{m(1/2-1/p)} \left(\sum_k f_k^p \right)^{1/p}.$$

3.4 Approssimazione Wavelet non lineare in L^p

L'idea da utilizzare è piuttosto semplice. Se la funzione target è regolare in una regione, lì useremo una bassa risoluzione; andremo cioè a scegliere per l'approssimazione termini corrispondenti a basse frequenze, appartenenti ad un intervallo diadico k , con k piccolo. Sulle regioni invece dove si ha meno regolarità si sceglieranno coefficienti appartenenti ad intervalli diadici di livello superiore.

Il nostro contesto è quello dell'approssimazione in L^p con $1 \leq p \leq \infty$ usando wavelets biortogonali. Allora Σ_n^w sarà così definito

$$\Sigma_n^w = \left\{ S : S = \sum_{I \in \Lambda} a_I \psi_I, \Lambda \subset D, \#\Lambda \leq n \right\}. \quad (3.8)$$

(Useremo la notazione $I = (j, k)$; ad ogni multi-indice I faremo inoltre corrispondere l'intervallo diadico $]k2^{-j}, (k+1)2^{-j}$ che chiameremo sempre I). In altre parole Σ_n^w è l'insieme di tutte le funzioni che sono combinazione di al più n wavelets. Analogamente a quanto già fatto, definiamo

$$\sigma_n^w(f)_p := \inf_{f \in \Sigma_n^w} \|f - S\|_p.$$

Osservazione 3.4.1 *Sia $\{V_j\}$ una MRA con funzione a scala ϕ . Siano inoltre*

$$\gamma := \sup\{s \in \mathbb{R} : \phi \in H^s(\mathbb{R})\} \quad \tilde{\gamma} := \sup\{s \in \mathbb{R} : \tilde{\phi} \in H^s(\mathbb{R})\}$$

allora

$$\|v\|_{H^s} \sim \|2^{sj}(v, \tilde{\psi}_{jk})\|_{\ell^2}, \quad s \in (-\tilde{\gamma}, \gamma), \quad (3.9)$$

$$\|v\|_{H^s} \sim \|2^{sj}(v, \tilde{\psi}_{jk})\|_{\ell^2}, \quad s \in (-\gamma, \tilde{\gamma})$$

dove con il simbolo \sim indichiamo l'equivalenza tra i due membri.

Sia Λ un insieme finito di intervalli, per ogni $x \in \mathbb{R}$ indichiamo con $I(x)$ il più piccolo intervallo in Λ che contiene x . Se tale intervallo non esiste, poniamo $I(x) := \mathbb{R}$ e $|I|^{-1} = 0$.

Sia $\psi_{I,p} = |I|^{-1/p+1/2}\psi_I$, $I \in D$ e $c_{I,p}(f) = (f, \tilde{\psi}_{I,p'})$, con $1/p + 1/p' = 1$. Osserviamo che vale $c_{I,p}(f) = |I|^{1/p-1/q}c_{I,q}$. Notiamo che $\{\psi_{I,p}\}$ è la rinormalizzazione in L^p della base $\{\psi_I\}$.

Lemma 3.4.2 *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e Λ un insieme finito. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ ha la decomposizione wavelet*

$$f = \sum_{I \in \Lambda} c_{I,p}(f)\psi_I, \quad (3.10)$$

con $|c_I(f)| \leq M$, per ogni $I \in \Lambda$, allora

$$\|f\|_p \leq C_1 M (\#\Lambda)^{1/p}, \quad (3.11)$$

dove $C_1 > 0$ è una costante numerica. Analogamente se $|c_I(f)| \geq M$, per ogni $I \in \Lambda$, allora

$$\|f\|_p \geq C_2 M (\#\Lambda)^{1/p}, \quad (3.12)$$

con $C_2 > 0$ costante numerica.

Dimostrazione: Diamo un'idea di come provare la (3.11), essendo la (3.12) analoga. Abbiamo

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \|S(f)\|_p = C \left\| \left(\sum_{I \in \Lambda} c_{I,p}^2 |I|^{-2/p} \chi_I \right)^{1/2} \right\|_p \text{ per (2.48)} \\ &\leq CM \left\| \left(\sum_{I \in \Lambda} |I|^{-2/p} \chi_I \right)^{1/2} \right\|_p \leq CM \| |I(x)|^{-1/p} \|_p. \end{aligned}$$

Se $J \in \Lambda$, allora l'insieme $\tilde{J} := \{x : I(x) = J\}$ è un sottinsieme di J . Da cui

$$\|f\|_p^p \leq CM^p \int_{\mathbb{R}} |I(x)|^{-1} dx \leq CM^p \sum_{J \in \Lambda} \int_{\tilde{J}} |J|^{-1} \leq CM^p (\#\Lambda),$$

che prova la (3.11). ♣

Definizione 3.4.3 Per $0 \leq \tau \leq \infty$ una successione (a_n) di numeri reali appartiene allo spazio di Lorentz $\mathcal{L}_\tau := \ell_{\tau, \infty}$ se e solo se

$$\#\{n : |a_n| > \epsilon\} \leq M^\tau \epsilon^{-\tau} \quad (3.13)$$

per ogni $\epsilon > 0$.

Inoltre $\|(a_n)\|_{\mathcal{L}_\tau} = \inf\{M : \#\{n : |a_n| > \epsilon\} \leq M^\tau \epsilon^{-\tau}\}$

Osservazione 3.4.4 Si osservi che $\|(a_n)\|_{\mathcal{L}_\tau} \leq \|(a_n)\|_{\ell_\tau}$.

Teorema 3.4.5 Sia $1 < p < \infty$ e $s > 0$, siano inoltre $f \in L^p(\mathbb{R})$, $f = \sum c_I \psi_{I,p}$, $I \in D$ tali che $(c_I)_{I \in D}$ sia in \mathcal{L}_τ , $1/\tau = s + 1/p$. Allora

$$\sigma_n(f)_p \leq C n^{-s} \|(c_I)\|_{\mathcal{L}_\tau}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

con la costante C dipendente solo da p e da s .

Per la dimostrazione si può vedere [1].

Usiamo ora il Teorema 3.4.5 per ottenere una disuguaglianza di Jackson, per l'approssimazione wavelet non lineare, nel caso degli spazi di Besov, utilizzando la caratterizzazione di tali spazi mediante i coefficienti wavelet (si veda (2.47))

Corollario 3.4.6 Sia $1 < p < \infty$, $s > 0$, $f \in B_\tau^s(L^\tau(\mathbb{R}))$, $1/\tau = s + 1/p$. Se $\psi \in B_q^\rho(L^\tau)$ per qualche q e per qualche $\rho > s$ e se ha r momenti nulli con $r > s$, allora

$$\sigma_n(f)_p \leq C \|f\|_{B_\tau^s(L^\tau)} n^{-s}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

con C dipendente solo da p e da s .

Dimostrazione: Abbiamo $c_{I,\tau}(f) = c_{I,p}(f) |I|^{1/\tau-1/p} = c_{I,p}(f) |I|^s$, quindi, se $f \in B_\tau^{s,\tau}$, $c_{I,\tau} \in \mathcal{L}_\tau$. In particolare per (2.47) si trova

$$\|f\|_{B_\tau^s(L^\tau)} = \|(c_{I,\tau})\|_{\ell_\tau} \geq \|(c_{I,\tau})\|_{\mathcal{L}_\tau}. \quad (3.16)$$

Quindi la (3.15) segue usando il Teorema 3.4.5. ♣

Ricordiamo ora una disuguaglianza di tipo Bernstein, nel medesimo contesto di approssimazione wavelet non lineare.

Teorema 3.4.7 *Sia $1 < p < \infty$, $s > 0$, $f \in L^p$. Se $f \in \Sigma_n$, allora*

$$\|f\|_{B_\tau^s(L^\tau)} \leq Cn^s \|f\|_{L^p}.$$

La dimostrazione si può trovare in [1]

3.5 Approssimazione Wavelet non lineare in H^1

In vista dell'uso di tecniche di approssimazione non lineare per la risoluzione di equazioni differenziali, vogliamo ora ottenere una disuguaglianza di tipo Jackson, nel caso in cui lo spazio di approssimazione sia H^1 . Abbiamo il seguente risultato:

Corollario 3.5.1 *Sia $1 < p < \infty$, $s > 0$, $f \in B_\tau^s(L^\tau(\mathbb{R}))$, $1/\tau = s + 1/p$, $f = \sum c_I \psi_{I,\tau}$ e $c_I \in \mathcal{L}_\tau$ si ha*

$$\sigma_n(f)_{H^1} \leq C \|f\|_{B_\tau^{s+1}(L^\tau)} n^{-s}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.17)$$

con C dipendente solo da p e da s .

Dimostrazione: Avremo dimostrato la tesi, se dimostreremo la validità della seguente

$$\|f\|_{B_\tau^{s+1}(L^\tau)} \quad = \quad \begin{matrix} \| |I|^{-1}(c_I) \|_{\ell_\tau} & \geq & \| |I|^{-1}(c_I) \|_{\mathcal{L}_\tau} & > & n^s \sigma_n(f)_{H^1}. \end{matrix} \quad (3.18)$$

$$(1) \qquad \qquad \qquad (2) \qquad \qquad \qquad (3)$$

La (1) si ottiene sostituendo $2^j d_{jk}(= |I|^{-1} c_I)$ in (2.46) e ricordando la (2.47). La (2) è vera per l'Osservazione 3.4.4.

La (3) è vera se è valido il seguente

Teorema 3.5.2 *Se $|I|^{-1} c_I \in \mathcal{L}_\tau$, $1/\tau = s + 1/p$, allora*

$$\sigma_n(f)_{H^1} \leq n^{-s} \| |I|^{-1} c_I \|_{\mathcal{L}_\tau} \quad (3.19)$$

La dimostrazione si basa sull'applicazione del Teorema 3.4.5 alla funzione $\tilde{f} = \sum_I c_I |I|^{-1} \psi_I$. Si ottiene che

$$\sigma_n(\tilde{f})_2 \leq C n^{-s} \| |I|^{-1} c_I \|_{\mathcal{L}_\tau} \quad (3.20)$$

cioè, ricordando la (3.9) che implica $\sigma_n(f)_{H^1} \sim \sigma_n(\tilde{f})_2$,

$$\sigma_n(f)_{H^1} \leq C n^{-s} \| |I|^{-1} c_I \|_{\mathcal{L}_\tau} \quad (3.21)$$

Osservazione 3.5.3 *E' lecito l'uso del Teorema 3.4.5, poichè la \tilde{f} soddisfa le sue ipotesi, in quanto abbiamo dimostrato la validità di (2.38).*

Risulta quindi dimostrato il Corollario 3.5.1. ♣

Capitolo 4

Un problema di approssimazione non lineare

4.1 Il problema e approssimazione lineare

Il problema di cui ci occupiamo è il seguente:

Problema 4.1.1 trovare $u \in H^1(\mathbb{T})$, dove \mathbb{T} è il cerchio unitario, che verifichi

$$\begin{aligned} -(au')' + bu' + cu &= f, & a, b, c &\in C^\infty, f \in L^2(\mathbb{T}) \\ u(0) &= u(1) \\ u'(0) &= u'(1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

che scritto nella formulazione variazionale, diventa:

Problema 4.1.2 trovare $u \in H^1(\mathbb{T})$ che soddisfi $\forall v \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (f, v) \\ a(u, v) &= \int_{\mathbb{T}} au'v' + \int_{\mathbb{T}} bu'v + \int_{\mathbb{T}} cuv, \quad (f, v) = \int_{\mathbb{T}} fv. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Consideriamo inizialmente un'approssimazione wavelet di tipo lineare.

Sia $\{V_j\}$ una MRA biortogonale di $L^2(\mathbb{T})$, di funzione scala ϕ , con ψ madre delle ondine.

Applicando a (4.2) il metodo di Galerkin, otteniamo il seguente problema *discreto*:

Problema 4.1.3 trovare $u_m \in V_m$ tale che

$$\forall v_m \in V_m, \quad \int_{\mathbb{T}} a u'_m v'_m + \int_{\mathbb{T}} b u'_m v_m + \int_{\mathbb{T}} c u_m v_m = \int_{\mathbb{T}} f v_m. \quad (4.3)$$

Osservazione 4.1.1 Cercare la soluzione del nostro problema in V_m , significa che fissiamo m a priori come livello massimo di discretizzazione e quindi la soluzione che troveremo sarà una soluzione approssimata con grado di risoluzione uguale a m . Tutte le informazioni sulla soluzione esatta contenute negli spazi V_j , $j > m$ vengono trascurate.

Esprimendo poi le funzioni *trial* u_m e *test* v_m nella base $\{\psi_{jk}^{\text{per}}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, dove per comodità usiamo la notazione $\psi_{-1,k}^{\text{per}} := \phi_{0,k}^{\text{per}}$, risolvere (4.3) diventa equivalente a risolvere il sistema lineare

$$M\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (4.4)$$

dove

$$M_{(j,k),(j',k')} = \int_{\mathbb{T}} a \psi'_{j,k}{}^{\text{per}} \psi'_{j',k'}{}^{\text{per}} + \int_{\mathbb{T}} b \psi'_{j,k}{}^{\text{per}} \psi_{j',k'}{}^{\text{per}} + \int_{\mathbb{T}} c \psi_{j,k}{}^{\text{per}} \psi_{j',k'}{}^{\text{per}} \quad \psi'{}^{\text{per}} \text{ derivata di } \psi^{\text{per}},$$

$$\mathbf{x} = (x_{j,k}) = \left(\int_{\mathbb{T}} u_m \tilde{\psi}_{j,k}{}^{\text{per}} \right)_{j,k} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (y_{j,k}) = \left(\int_{\mathbb{T}} f \tilde{\psi}_{j,k}{}^{\text{per}} \right)_{j,k},$$

$$u_m = \sum_{j,k} x_{j,k} \psi_{j,k}{}^{\text{per}}, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad k = 0, \dots, 2^m - 1$$

Teorema 4.1.2 Per il metodo di Galerkin, usando una base di wavelets per approssimare la soluzione di (4.2), il numero di condizionamento di $D^{-1}MD^{-1}$ è maggiorato da una costante indipendente da m , essendo D la matrice diagonale

$$D_{(j,k),(j',k')} = 2^j \delta_{(j,j')} \delta_{(k,k')}. \quad (4.5)$$

Dimostrazione: [9]

Sia \mathbf{z} il vettore $(d_{j,k})_{j,k}$ e $g = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}^{\text{per}}$. Allora $\mathbf{z}^t M \mathbf{z} = a(g, g)$.

Se si suppone $a > \alpha$, $c - b' > \beta > 0$, si ha che

$$\|g\|_{H^1} \sim \mathbf{z}^t M \mathbf{z}$$

Usando poi la (3.9), si ottiene

$$C\|D\mathbf{z}\|_{\ell^2} = C \sum_{j,k} |2^j d_{j,k}|^2 \leq \mathbf{z}^t M \mathbf{z} \leq C' \sum_{j,k} |2^j d_{j,k}|^2 = C' \|D\mathbf{z}\|_{\ell^2}$$

Si ha quindi

$$\forall \mathbf{z} \quad C\|\mathbf{z}\|_{\ell^2}^2 \leq \mathbf{z}^t D^{-1} M D^{-1} \mathbf{z} \leq C'\|\mathbf{z}\|_{\ell^2}^2.$$

Sia ora \mathbf{z} tale che $D^{-1} M D^{-1} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$, allora moltiplicando ambo i membri per \mathbf{z}^t , poichè $\|\mathbf{z}^t D^{-1} M D^{-1} \mathbf{z}\|_{\ell^2} \sim \|\mathbf{z}\|_{\ell^2}^2$, si ha $\|\mathbf{z}\|_{\ell^2} \sim \lambda \|\mathbf{z}\|_{\ell^2}$, cioè $\lambda \sim 1$. ♣

4.2 Soluzione con un metodo non lineare

Consideriamo ora un'approssimazione wavelet non lineare.

Se nel caso lineare cercavamo una soluzione discreta $u_m \in V_m$, che aveva quindi 2^m gradi di libertà fissati a priori, nel caso non lineare, usando le notazioni della sezione precedente, cerchiamo una soluzione discreta $u_N \in \Sigma_N^w$, con N gradi di libertà.

Per semplicità considereremo solo funzioni appartenenti, in generale, a V_m con $N \ll 2^m$.

Sia $\{V_j\}$ una MRA biortogonale di $L^2(\mathbb{T})$, di funzione scala ϕ e di madre delle ondate ψ .

Il nostro obiettivo sarà quindi trovare una soluzione di (4.2) in

$$\Sigma_N \cap V_m \tag{4.6}$$

dove m è fissato e $2^m \gg N$.

4.2.1 Costruzione dell'algoritmo risolutivo

Scopo di questa sezione è proporre un **algoritmo** per l'approssimazione nello spazio (4.6) della soluzione di (4.2)

$$\begin{aligned} &u_0 = 0 \\ &\text{for } n = 1, nmax \\ &\quad u^{n+1} = P_N(u^n + \theta(g - Au^n)) \\ &\text{end} \end{aligned} \tag{4.7}$$

dove

$$\begin{aligned} P_N : V_m &\rightarrow \Sigma_N \\ P_N u &= \sum_{\Lambda} \tilde{c}_I \psi_I \end{aligned} \quad (4.8)$$

con $\tilde{c}_I = |I|^{-1} c_I$, Λ contenente gli N più grandi coefficienti \tilde{c}_I e $\theta = 2/(\lambda_{max} + \lambda_{min})$, dove $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ sono rispettivamente il più grande ed il più piccolo autovalore della matrice A .

4.2.2 Stima dell'errore

Introduciamo le seguenti notazioni:

- (1) \mathbf{u}_m è il vettore dei coefficienti wavelet della soluzione $u_m \in V_m$ di (4.3).
- (2) $\tilde{\mathbf{u}}_N^n$ è il vettore dei coefficienti wavelet dell' n -sima iterata del metodo (5.8).

E' naturale, ora, porsi la seguente domanda :

- (I) *Con che errore, al variare di n , $\tilde{\mathbf{u}}_N^n$ approssima \mathbf{u}_m ?*

La risposta è nel seguente

Teorema 4.2.1 *Sia $\tilde{e}_n = \tilde{\mathbf{u}}_N^n - \mathbf{u}_m$, e sia A tale che $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{L}_\tau$ si ha:*

$$\|(I - \theta A)\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_\tau} \leq \gamma \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_\tau}, \quad \text{con } \gamma < 1, \quad (4.9)$$

allora, se $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_\tau \cap \ell^2$, si ha:

- (i) *Stabilità:*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_N^n\|_{\ell^2} \leq C', \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

dove C' è una costante che dipende dai dati iniziali.

- (ii) *Stima dell'errore di approssimazione:*

$$\|\tilde{e}_n\|_{\ell^2} \leq (\rho(I - \theta A))^n \|\tilde{e}_0\|_{\ell^2} + \frac{C}{1 - \rho(I - \theta A)} N^{-s} \quad (4.11)$$

dove ρ indica il raggio spettrale della matrice, C è una costanti che dipende solo dai dati iniziali e s soddisfa $1/\tau = s + 1/2$.

Dimostrazione: Se $\mu = \rho(I - \theta A)$, nell'ipotesi $\tilde{\mathbf{u}}^0 \in \ell^2$, si ha

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\|_{\ell^2} &= \|P_N(\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n))\|_{\ell^2} \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n)\|_{\ell^2} \\
&\leq \|\tilde{\mathbf{u}}_N^n(I - \theta A) + \theta\mathbf{g}\|_{\ell^2} \\
&\leq \|\theta\mathbf{g}\|_{\ell^2} + \|\tilde{\mathbf{u}}_N^n(I - \theta A)\|_{\ell^2} \\
&\leq \dots \leq (1 + \mu + \dots + \mu^n)\|\theta\mathbf{g}\|_{\ell^2} + \mu^n\|\tilde{\mathbf{u}}^0\|_{\ell^2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

cioè la (i).

Se poniamo ora

$$\epsilon_n = P_N(\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n)) - (\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n)) \tag{4.13}$$

si vede, con un semplice conto, che vale la seguente relazione

$$\tilde{\epsilon}_{n+1} - \tilde{\epsilon}_n + \theta A\tilde{\epsilon}_n = \epsilon_n \tag{4.14}$$

da cui, passando alla norma in ℓ^2 , si ottiene

$$\|\tilde{\epsilon}_{n+1}\|_{\ell^2} \leq \rho(I - \theta A)\|\tilde{\epsilon}_n\|_{\ell^2} + \|\epsilon_n\|_{\ell^2} \tag{4.15}$$

Iterando la (4.15), si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\epsilon}_{n+1}\|_{\ell^2} &= (\rho(I - \theta A))^{n+1}\|\tilde{\epsilon}_0\|_{\ell^2} + (\rho(I - \theta A))^n\|\epsilon_0\|_{\ell^2} + \dots + (\rho(I - \theta A))^k\|\epsilon_{n-k}\|_{\ell^2} \\
&\quad + \dots + (\rho(I - \theta A))\|\epsilon_{n-1}\|_{\ell^2} + \|\epsilon_n\|_{\ell^2} \\
&\leq \max_{0 \leq k \leq n} \|\epsilon_k\|_{\ell^2} \sum_{k=1}^n (\rho(I - \theta A))^k + (\rho(I - \theta A))^{n+1}\|\tilde{\epsilon}_0\|_{\ell^2}
\end{aligned}$$

cioè

$$\|\tilde{\epsilon}_{n+1}\|_{\ell^2} \leq \max_k \|\epsilon_k\|_{\ell^2} \sum_{k=1}^n (\rho(I - \theta A))^k + \|\tilde{\epsilon}_0\|_{\ell^2} (\rho(I - \theta A))^{n+1} \tag{4.16}$$

Ricordando il Teorema 4.1.2, si ha che $\rho(I - \theta A) < 1$, quindi

$$\|\tilde{\epsilon}_{n+1}\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{1 - \rho(I - \theta A)} \max_k \|\epsilon_k\|_{\ell^2} + \|\tilde{\epsilon}_0\|_{\ell^2} (\rho(I - \theta A))^{n+1} \tag{4.17}$$

Da (4.9) segue che

$$\tilde{\mathbf{u}}^0, \mathbf{g} \in \mathcal{L}_\tau \longrightarrow \tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n) \in \mathcal{L}_\tau$$

con $\|\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n)\|_{\mathcal{L}_\tau} \leq C$. Infatti

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n)\|_{\mathcal{L}_\tau} &= \|\tilde{\mathbf{u}}_N^n(I - \theta A) + \theta\mathbf{g}\|_{\mathcal{L}_\tau} \\ &\leq \|\theta\mathbf{g}\|_{\mathcal{L}_\tau} + \|\tilde{\mathbf{u}}_N^n(I - \theta A)\|_{\mathcal{L}_\tau} \\ &\leq \dots \leq (1 + \gamma + \dots + \gamma^n)\|\theta\mathbf{g}\|_{\mathcal{L}_\tau} + \gamma^n\|\tilde{\mathbf{u}}^0\|_{\mathcal{L}_\tau} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Infine, per il Corollario 3.4.6, applicato a $\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n) \in \mathcal{L}_\tau$ si ha che

$$\max \|\epsilon_n\|_{\ell^2} \leq C(\mathbf{g}, \mathbf{u}^0)N^{-s}.$$

Da qui la (ii). ♣

Osservazione 4.2.2 *Grazie al Teorema 4.2.1, possiamo controllare il numero di iterazioni in modo da rendere il metodo efficiente. Sarà inutile un numero di iterazioni tale che $(\rho(I - \theta A))^n = o(\frac{C}{1 - \rho(I - \theta A)}N^{-s})$, in questo caso, infatti, non si avrebbe alcun miglioramento dell'errore di approssimazione.*

Volendo trovare un'espressione esplicita del numero di iterazioni efficaci, oltre il quale non si ha più alcun guadagno, imponiamo

$$\frac{CN^{-s}}{1 - \rho(I - \theta A)} \leq (\rho(I - \theta A))^n$$

da cui si ottiene facilmente

$$n \geq \frac{s \log N + \log(1 - \rho(I - \theta A))}{|\log(\rho(I - \theta A))|}.$$

Corollario 4.2.3 *Siano $u = \sum_I c_I \psi_I$ la soluzione del problema (4.1.1) ed $u_N = \sum_{I \in \Lambda} c_I \psi_I$, allora*

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq \frac{C}{1 - \rho(I - \theta A)} N^{-s} + 2^{-m(s-1)} \|u\|_{H^s} \quad \forall s > 1 \quad s \leq r + 1 \quad (4.19)$$

dove r è il numero dei momenti nulli di $\tilde{\psi}$

Dimostrazione: Per la disuguaglianza triangolare in H^1 si ha che

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq \|u - u_m\|_{H^1} + \|u_m - u_N\|_{H^1}$$

Ora, ricordando la (3.9) e ricordando inoltre che i vettori $\tilde{\mathbf{u}}_N^n$ ed il vettore \mathbf{u}_m sono costruiti usando i coefficienti $\tilde{c}_I = |I|^{-1}c_I$, si ottiene la seguente equivalenza tra norme

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_N^n - \mathbf{u}_m\|_{\ell^2} \sim \|u_N - u_m\|_{H^1}.$$

Da cui, per il Teorema 4.2.1,

$$\|u_N - u_m\|_{H^1} \leq (\rho(I - \theta A))^n \|\tilde{e}_o\|_{\ell^2} + \frac{C}{1 - \rho(I - \theta A)} N^{-s} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

essendo poi $\rho(I - \theta A) < 1$ si ottiene

$$\|u_N - u_m\|_{H^1} \leq \frac{C}{1 - \rho(I - \theta A)} N^{-s}$$

Infine per il Lemma di Ceá [11] si ha che

$$\|u - u_m\|_{H^1} \leq 2^{-m(s-1)} \|u\|_{H^s} \quad \forall s > 1, s \leq r + 1$$

dove r è il numero di momenti nulli di $\tilde{\psi}$. Il Corollario risulta così dimostrato. ♣

Capitolo 5

Esperimenti numerici

Gli esperimenti numerici per testare il comportamento dell'algoritmo (4.7) nell'approssimazione della soluzione di (4.1.1), sono stati realizzati, per semplicità, nelle ipotesi $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$. Il problema da risolvere, espresso nella sua formulazione variazionale, diventa quindi:

Problema 5.0.1 trovare $u \in H^1(\mathbb{T})$ che soddisfi $\forall v \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (f, v) \\ a(u, v) &= \int_{\mathbb{T}} u'v' + \int_{\mathbb{T}} uv, \quad (f, v) = \int_{\mathbb{T}} fv. \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.1 Implementazione dell'algoritmo

(PASSO 1) MATRICE DI RIGIDITA' E RIGHT HAND SIDE

Una volta fissato m (che rappresenta il livello massimo di discretizzazione), ricordato che $\dim V_m = 2^m$, si costruisce la matrice di rigidità R relativa allo spazio V_m .

Tale matrice ha la seguente forma:

$$R = (r_{nk}) = \left(\int_{\mathbb{T}} \phi'_{mk} \phi'_{mn} + \phi_{mk} \phi_{mn} \right) \quad (5.2)$$

Si costruisce poi il right hand side:

$$\bar{f} = (f_n) = \left(\int_{\mathbb{T}} f \phi_{mn} \right). \quad (5.3)$$

Si opera quindi il cambiamento di base: dalla base delle funzioni scala alla base di wavelets e si ottiene la matrice di rigidità M ed il right hand side \mathbf{y} . Il vettore \mathbf{x} in (4.4), avendo operato il cambiamento di base (2.42), è strutturato nel modo seguente:

x_1 è il coefficiente in V_0

x_2 è il coefficiente in W_0

x_{2+k} per $k = 1, \dots, 2^j$, $j = 1, \dots, m - 1$, sono i coefficienti in W_j

Figura 5.1: la matrice di rigidità nella base di wavelets M con $m = 8$

(PASSO 2) PROBLEMA DA RISOLVERE

Usando come preconditionatore la matrice D di Jaffard, definita in (4.5), siamo ricondotti a risolvere il seguente problema

$$D^{-1}MD^{-1}D\mathbf{x} = D^{-1}\mathbf{y} \quad (5.4)$$

e ponendo

$$A = D^{-1}MD^{-1}, \quad \mathbf{u} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{g} = D^{-1}\mathbf{y} \quad (5.5)$$

dobbiamo risolvere

$$A\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (5.6)$$

Osservazione 5.1.1 *Anche se non siamo nell'ipotesi di basi ortonormali per la validità del Teorema 4.1.2, si può vedere (ad esempio numericamente) che*

la matrice $D^{-1}AD^{-1}$ è ben condizionata, con numero di condizionamento indipendente da m .

(PASSO 3) ITERAZIONE DI RICHARDSON

Sia $\tilde{\mathbf{u}}_n$ assegnato, si ha allora

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_n) \quad (5.7)$$

con $\theta = 2/(\lambda_{max} + \lambda_{min})$ dove λ_{max} e λ_{min} sono rispettivamente il massimo ed il minimo autovalore della matrice A .

(PASSO 4) ALGORITMO ITERATIVO **non** LINEARE

Introducendo l'operatore non lineare \mathbf{P}_N definito in (4.8) definiamo $\tilde{\mathbf{u}}_N^n$ come

$$\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} = \mathbf{P}_N(\tilde{\mathbf{u}}_N^n + \theta(\mathbf{g} - A\tilde{\mathbf{u}}_N^n)) \quad (5.8)$$

Questo passo rende l'algoritmo non lineare.

5.2 Esperimenti numerici

Per testare il metodo (5.8), procediamo nel seguente modo

- (a) Si considera $u \in H^1(T)$ soluzione di (4.2), per un'assegnata $f \in L^2(\mathbb{R})$ (u e f sono noti).
- (b) Scelto m , si costruisce il vettore \bar{f} , right hand side definito in (5.3)
- (c) Calcolato il vettore \mathbf{g} in (5.6), si itera il metodo (5.8) un numero n_{max} fissato di volte.
- (d) Si misura $\|\mathbf{u}_m - \tilde{\mathbf{u}}_N^n\|_v$, dove $\|\cdot\|_v$ sarà la norma in L^2 o la norma H^1 .

5.2.1 Due casi

(A) In riferimento al punto (a), consideriamo

$$u(x) = e^{\cos 4\pi x} + \sin 4\pi x - e \quad (5.9)$$

e f definita da $f = -u'' + u$. I risultati dei test numerici, con $m = 9$ e $nmax = 50$, sono mostrati nelle seguenti tabelle

Errore in norma L^2	
N	$\ \mathbf{u}_m - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\ _{L^2}$
10	32.92885
20	1.33461
30	0.51570
40	0.31117
51	0.22131
61	0.11242
71	0.07977
81	0.10276
92	0.09832
102	0.06135

Tabella 5.1: errore di approssimazione in norma L^2 .

Errore in norma H^1	
N	$\ \mathbf{u}_m - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\ _{H^1}$
10	39.88046
20	11.95111
30	8.39278
40	5.94793
51	4.83391
61	4.05235
71	3.32526
81	2.88048
92	2.56872
102	2.30032

Tabella 5.2: errore di approssimazione in norma H^1 .

Grafico della funzione test (5.9)

Figura 5.2: La funzione test.

Riportiamo di seguito alcuni grafici sul comportamento dell'errore di approssimazione

(*) Andamento di $\|\mathbf{u}_m - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\|_{L^2}$ in funzione di N

Figura 5.3: plot in scala logaritmica dell'errore di approssimazione in norma L^2 .

(**) Andamento di $\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\|_{H^1}$ in funzione di N

Figura 5.4: plot in scala logaritmica dell'errore di approssimazione in norma H^1 .

(***) Andamento di $\|\tilde{e}_n\|_{L^2}$ in funzione di n , (cfr. Osservazione 4.2.2), per diversi valori di N .

Figura 5.5: plot dell'errore $\|\tilde{e}_n\|_{L^2}$ in funzione di n , per $N = 40, N = 61$.

(B) Consideriamo ora, come funzione test, la seguente

$$t(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2x + 3/2 & \text{se } 1/3 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

e f definita sempre come $f = -u'' + u$. I risultati dei test numerici, con $m = 9$ e $nmax = 50$, sono mostrati nelle seguenti tabelle

Errore in norma L^2	
N	$\ \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\ _{L^2}$
10	0.44666
20	0.03138
30	0.00173
40	0.00001
51	0.00002
61	0.00008
71	0.00017
81	0.00029
92	0.00042
102	0.00054

Tabella 5.3: errore di approssimazione in norma L^2 .

Errore in norma H^1	
N	$\ \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\ _{H^1}$
10	0.96855
20	0.26324
30	0.01619
40	0.00001
51	0.00004
61	0.00019
71	0.00044
81	0.00080
92	0.00117
102	0.00152

Tabella 5.4: errore di approssimazione in norma H^1 .

Grafico della funzione test (5.9) Riportiamo di seguito alcuni grafici sul com-

Figura 5.6: La funzione test.

portamento dell'errore di approssimazione

(*) Andamento di $\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_N^{nmax}\|_{L^2}$ in funzione di N

Figura 5.7: plot in scala logaritmica dell'errore di approssimazione in norma L^2 .

(**) Andamento di $\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_N^{max}\|_{H^1}$ in funzione di N

Figura 5.8: plot in scala logaritmica dell'errore di approssimazione in norma H^1 .

(***) Andamento di $\|\tilde{e}_n\|_{L^2}$ in funzione di n , (cfr. Osservazione 4.2.2), per diversi valori di N .

Figura 5.9: plot dell'errore $\|\tilde{e}_n\|_{L^2}$, al variare di n , per $N = 40, N = 61$.

Capitolo 6

Conclusioni

L'analisi wavelet costituisce un efficace “microscopio” matematico per affrontare problemi di approssimazione di una funzione assegnata ed inoltre fornisce efficaci caratterizzazioni di molti spazi funzionali (L^p , Sobolev, Besov) nei termini dei coefficienti wavelet delle funzioni di tali spazi.

Le basi di wavelets, in particolare, sono ideali per affrontare approssimazioni non lineari, in quanto tali approssimazioni risultano ottimali in spazi di Besov del tipo $B_\tau^{s,\tau}$; e caratterizzare questi spazi, come ricordato precedentemente, risulta facile usando coefficienti wavelets.

In questa tesi tali tecniche di approssimazione wavelet non lineare sono state accoppiate al metodo di Richardson per costruire un algoritmo che risolva numericamente equazioni ellittiche. In questa tesi si è analizzata la stabilità dell'algoritmo in dimensione uno per condizioni ai limiti di tipo periodico, fornendo anche una stima dell'errore in funzione del numero di gradi di libertà. I test numerici effettuati confermano la stima dell'errore. Pur essendo il problema considerato particolarmente semplice, i risultati numerici sono promettenti e meritano di essere generalizzati a problemi ellittici più complessi, quali problemi in dimensione n , con condizioni al bordo, possibilmente in domini non regolari.

Perché questo algoritmo possa essere applicato in problemi reali, sarà comunque necessaria una ottimizzazione del costo computazionale dell'algoritmo. Per quanto riguarda quest'ultimo problema, sarà importante avere, in qualche modo, prima di ogni k -sima iterazione, una conoscenza a priori $\forall j \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq j \leq m - 1$, dove m è il livello massimo di discretizzazione dell'algoritmo, degli insiemi $\Lambda_j \subset \mathbb{N}$, $\#\Lambda_j \leq$

$n(j)$, con $0 < n(j) \leq 2^j$, dove Λ_j contiene gli $n(j)$ più grandi tra i coefficienti $\{\tilde{d}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\tilde{d}_{j,k} = 2^j d_{j,k}$, $\tilde{d}_{-1,k} := \tilde{f}_{0,k}$) contenuti nel vettore $\tilde{\mathbf{u}}_N^k$, ottenuto dopo $k - 1$ iterazioni del nostro algoritmo.

Bibliografia

- [1] R.A. DeVore
Nonlinear approximation
Acta Numer. (1998)
- [2] R.A. DeVore, B. Jawerth e V. Popov
Compression of wavelet decomposition
Amer. J. Math. **114** (1992)
- [3] A. Cohen, I. Daubechies, J.C. Feauveau
Biorthogonal bases of compactly supported wavelets
Comm. Pure Appl. Math. **43** (1992)
- [4] S. Bertoluzza
Some error estimates for wavelet expansion
Math. Mod. Meth. Appl. Sc. **4** (1992)
- [5] S. Bertoluzza, G. Naldi
Some remarks on wavelet interpolation
Comp. Appl. Math. **1** (1994)
- [6] Y. Meyer
Ondelettes et Opérateurs, Vol. 1
Hermann, PARIS, 1990
- [6] I. Daubechies
Ten lectures on wavelets
SIAM, PHILADELPHIA, 1992

- [7] Y. Meyer
Wavelets: algorithms and applications
 SIAM, PHILADELPHIA, 1993
- [8] A. Cohen
Ondelettes et traitement numerique du signal
 MASSON, PARIS, 1992
- [9] S. Jaffard
Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems
 SIAM. J. Numer. Anal. **4** (1992)
- [10] Soardi
Appunti sulle ondine
 Preprint, 1997
- [11] R.A. DeVore, S. Dahlke
Besov regularity for elliptic boundary value problems
 Communications in PDEs, (**22**), (1997)
- [11] P. Ciarlet
The finite element method for elliptic problem
 NORTH HOLLAND ,1978
- [12] J.L. Lions, E. Magenes
Problèmes aux limites non homogènes et applications
 DUNOD, PARIS, (1968)
- [13] Y. Maday, V. Perrier, J.C. Ravel
Adaptivité dynamique sur bases d'ondelettes pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles
 C.R. Acad. Sci. Paris, (**t.312,I**), (1991)

[14] A. Tabacco, C. Canuto
Ondine biortogonali
Preprint